Propädeutikum Diskrete Mathematik (MA 1501)

Prof. Dr. R. Hemmecke | B.Sc. W. F. Riedl | Dipl-Math. M. Silbernagl

Aufgabenblatt 1

Tutor-Aufgabe 1.1
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und gelte $n := |V|$ und $m := |E|$.

Zeigen Sie die ersten zwei Teilaussagen von Satz 2.17,

a) wenn G ein Baum ist, dann ist G zusammenhängend und $m = n - 1$, und

b) wenn G ein Baum ist, dann existiert zu je zwei Knoten $x, y \in V$ **genau** ein x, y-Weg in G.

Hinweis: Beachten Sie das sogenannte *Schubfachprinzip* bei der Bearbeitung der Aufgaben:

„Müssen m Briefe in n Schubladen gelegt werden und gilt $m > k \cdot n$, dann gibt es mindestens eine Schublade in die mindestens $k + 1$ Briefe kommen.“

Aufgabe 1.2 [2+2+2+1+2]
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie:

a) Besitzt G mindestens zwei Knoten, so hat G mindestens zwei Knoten gleichen Grades.

b) G hat eine gerade Anzahl von Knoten ungeraden Grades.

c) Ist G kreisfrei, so gilt für den Minimalgrad $\delta(G) := \min_{v \in V} \{deg(v)\}$ eines Graphen G die folgende Ungleichung: $\delta(G) \leq 1$.
(Ist G also ein Baum mit mindestens zwei Knoten, so besitzt G Blätter!)

Hinweis: Betrachten Sie zur Lösung längste Wege in G!

d) Ist G kreisfrei (man sagt auch G ist ein Wald), dann sind die Zusammenhangskomponenten von G Bäume.

Hinweis: Eine Zusammenhangskomponente von G ist ein zusammenhängender induzierter Subgraph $G' = (V', E')$ von G, sodass für alle $v \in V \setminus V'$ gilt, dass der induzierte Subgraph $G'' = (V' \cup \{v\}, E'')$ nicht zusammenhängend ist.

e) Bezeichnet man für $v \in V$ mit $G - v := (V', E')$ den um den Knoten v reduzierten Graphen, d.h. $V' := V \setminus \{v\}$ und $E' := \{e \in E : v \notin e\}$, dann gilt, falls G ein Baum ist, für jedes Blatt b in G, dass $G - b$ wieder ein Baum ist.

Bemerkung: Wir haben nun Lemma 2.16 (fast vollständig) bewiesen. Welcher Beweis muss leicht abgewandelt werden, um auch die volle Aussage von Lemma 2.16b zu erhalten?

Aufgabe 1.3 [2+1+2+2+2+2]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $n := |V|, m := |E|$. In Satz 2.17 der Vorlesung wurde die Äquivalenz der folgenden Aussagen behauptet:

(i) G ist ein Baum,

(ii) G ist zusammenhängend und $m = n - 1$,

(iii) G ist kreisfrei und $m = n - 1$,

(iv) G ist kantenmaximal kreisfrei,

(v) G ist kantenminimal zusammenhängend, und

(vi) zu je zwei Knoten $x, y \in V$ existiert genau ein x, y-Weg in G.

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 2.17, indem Sie folgende Teilaufgaben lösen.

a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über k:
Ist G kreisfrei und k die Anzahl seiner Zusammenhangskomponenten, dann besitzt G genau $n - k$ Kanten.

b) Beweisen Sie (iii) $\Rightarrow$ (i).

c) Beweisen Sie (ii) $\Rightarrow$ (iii).

d) Beweisen Sie (v) $\Rightarrow$ (iv).

e) Beweisen Sie (vi) $\Rightarrow$ (v).

f) Beweisen Sie (iv) $\Rightarrow$ (i).

Aufgabe 1.4 [2+2]

a) Man möchte eine Landkarte so färben, dass je zwei Länder, die eine (echte) Grenze zueinander haben, verschiedene Farben bekommen (vgl. Vorlesung).

   (i) Modellieren Sie das Problem mithilfe eines Graphen.

   (ii) Geben Sie eine Karte an, die nicht 3-färbbar ist.

b) Formulieren Sie das bekannte Sudoku als Graphenfärbungsproblem im Sinne von Teilaufgabe (a).

Zum Übungsbetrieb

Vor Ihnen liegt das erste Aufgabenblatt des Semesters. Eine kleine Gebrauchsanweisung:

- Diskutieren Sie die Aufgaben in Ihrer Übungsgruppe. Die Zeit wird bei weitem nicht ausreichen, alle Aufgaben zu lösen und sauber auszuformulieren. Sie sollten stattdessen versuchen, sich einen guten Überblick zu verschaffen.
- Die in den Aufgaben angegebenen Punkte dienen lediglich als ungefähre Orientierung für die Schwierigkeit der Aufgabe.
- Erstellen Sie – am Besten in einer Gruppe mit bis zu drei Personen – einen Lösungsvorschlag. Werfen Sie diesen bis zu unten angegebenen Uhrzeit am Montag, der Ihrer Übung folgt, in den entsprechend gekennzeichneten Briefkasten im Untergeschoss des MI-Gebäudes.
- Holen Sie die korrigierten Hausaufgaben in Ihrer folgenden Übung ab. In dieser Übung werden auch ausgewählte Aufgaben (vgl. Feedback) an der Tafel besprochen.

... Fortsetzung auf der nächsten Seite ...

- Nicht abgeholte Hausaufgaben finden Sie im Metallschrank direkt um die Ecke hinter der Glastüre am Eingang des M9-Fingers (02.04.xxx)

Wir wünschen einen guten Start an der TUM und ein erfolgreiches erstes Semester!

Abgabe: bis Montag, 14:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Bitte notieren Sie auf ihrer Abgabe:

- **Name(n), Vorname(n),**
- **Matrikelnummer(n) und**
- **Rückgabeübungsgruppe**

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.

Die Abgabedaten von Blatt 1 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2013/PropDM`.