Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Propädeutikum Diskrete Mathematik (MA 1501)

Prof. Dr. R. Hemmecke | B.Sc. W. F. Riedl | Dipl-Math. M. Silbernagl

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1 [2]

Finden Sie Fehler im folgenden „Beweis" der falschen Aussage:
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = |E| \geq 3$. Dann ist G zusammenhängend.

„Beweis" (durch Induktion): Induktionsanfang $n = 3$: Es gibt genau einen Graphen mit 3 Knoten und 3 Kanten: ein Dreieck. Dieses ist zusammenhängend.
Induktionsschritt ($n \to n + 1$): Sei $G = (V, E)$ und $|V| = |E| = n + 1$ und G' ein Subgraph von G mit n Knoten und n Kanten. Wegen der Induktionsvoraussetzung ist G' zusammenhängend. Sei x der (eindeutige) Knoten in $V \setminus V(G')$. Da G' auch genau eine Kante weniger hat als G, hat x mindestens Grad 1 in G, also ist x mit einem Knoten aus G' verbunden. Damit folgt aber, dass G zusammenhängend ist.

Aufgabe 2.2 [1+2+2]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie:

a) $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$.

b) $\frac{|V|}{\alpha(G)} \leq \Delta(G) + 1$.

Hinweis: Betrachten Sie eine maximale stabile Menge und ihre Nachbarschaft.

c) Ist $|V| \geq 6$, dann ist $\max\{\alpha(G), \omega(G)\} \geq 3$.

Aufgabe 2.3 [2+1+2+2]

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

a) Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(i) G ist bipartit.

(ii) Für jeden Subgraphen $H \subset G$ gilt: $\alpha(H) \geq \frac{|V(H)|}{2}$.

b) Zeigen Sie in einer Zeile: Ist G ein Baum, so ist G bipartit.

c) Es sei G zusammenhängend und jeder zusammenhängende Subgraph $H = (V, E')$ mit $|E'| = |V|$ sei bipartit. Zeigen Sie, dass dann auch G bipartit ist.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis die Äquivalenz der folgenden Aussagen (warum gelten diese?) für einen Graphen $G = (V, E)$:

(i) G ist zusammenhängend.

(ii) Für jede Partition $V = X \dot\cup Y$ mit $X, Y \neq \emptyset$ existiert eine Kante $\{x, y\} \in E$ mit $x \in X$ und $y \in Y$.

(iii) Es existiert ein Baum $H = (V, F)$ als Subgraph von G.

d) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass es einen bipartiten Subgraphen $G' = (V, E')$ von G gibt, so dass $|E'| \geq \frac{|E|}{2}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.4 [3]

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph auf n Knoten und $\sigma : [n] \to V$ eine bijektive Funktion, die eine Reihenfolge der Knoten definiert. Dann ist $Greedy(G, \sigma)$ die Anzahl der Farben, die eine Greedy-Färbung des Graphen, bei der die Knoten in Reihenfolge σ gefärbt werden, benötigt.
Zeigen Sie, dass es für jeden Graphen G eine Reihenfolge σ gibt mit $Greedy(G, \sigma) = \chi(G)$.

Abgabe: bis Montag, 14:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Bitte notieren Sie auf Ihrer Abgabe:

- **Name(n), Vorname(n),**
- **Matrikelnummer(n) und**
- **Rückgabeübungsgruppe**

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.

Die Abgabedaten von Blatt 2 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2013/PropDM`.