Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Propädeutikum Diskrete Mathematik (MA 1501)

Prof. Dr. R. Hemmecke | B.Sc. W. F. Riedl | Dipl-Math. M. Silbernagl

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1 [1+2+3+1]

Es sei $\ell(G)$ die Anzahl Blätter in einem Graph G, und T ein Baum auf mindestens 2 Knoten.

a) Es sei x ein Blatt von T, das zu einem Knoten y mit Grad $deg(y) \geq 3$ benachbart ist. Zeigen Sie, dass $|V(T-x)| - \ell(T-x) = |V(T)| - \ell(T)$.

b) Folgern Sie, dass es einen Subgraphen $T' \subset T$ auf mindestens 2 Knoten gibt mit folgenden Eigenschaften:

(i) T' ist ein Baum;

(ii) jedes Blatt von T' ist zu einem Knoten mit Grad ≤ 2 benachbart;

(iii) $|V(T')| - \ell(T') = |V(T)| - \ell(T)$.

c) Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $\nu(T) \geq \frac{|V(T)|-\ell(T)+1}{2}$.

d) Geben Sie, für jedes $n \geq 3$, einen Baum an, für den diese Aussage sogar mit Gleichheit gilt.

Aufgabe 3.2 [4 Punkte]

Zwei Spieler P_1 und P_2 wählen jeweils abwechselnd Knoten des zusammenhängenden Graphen G. Der gewählte Knoten muss jeweils ein Nachbar des im vorherigen Zug vom Gegenspieler gewählten Knoten sein. Ein Knoten kann maximal einmal gewählt werden. Spieler P_1 darf mit einem beliebigen Knoten beginnen. Das Spiel endet, wenn einer der Spieler keinen Knoten mehr wählen kann. Der Spieler, der als letzter einen Knoten wählen konnte, gewinnt.

Unter welchen Voraussetzungen kann Spieler P_i, $i \in \{1, 2\}$ das Spiel immer für sich entscheiden und wie muss P_i dann Knoten wählen, um auf jeden Fall zu gewinnen? (Hinweis: Matchings!)

Aufgabe 3.3 [3+2+3]

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit zugehöriger Bipartition $V = A \dot{\cup} B$. Beweisen Sie:

a) Korollar 3.5 aus der Vorlesung: Gilt $|A| \leq |B|$ und $\deg(v) = a \in \mathbb{N}$ für alle $v \in A$ sowie $\deg(v) = b \in \mathbb{N}$ für alle $v \in B$, dann existiert ein Matching, das A vollständig überdeckt.

b) Existiert $d \in \mathbb{N}$, sodass $|N(S)| \geq |S| - d$ für alle Teilmengen $S \subset A$ gilt, dann existiert in G ein Matching, das mindestens $|A| - d$ Knoten aus A überdeckt.

Hinweis: Machen Sie den Beweis des Heiratssatzes nicht nach, sondern konstruieren Sie einen Hilfsgraphen G^*, auf den Sie den Heiratssatz anwenden können.

c) Gilt $|A| = |B| = t \in \mathbb{N}$ und $|E| > t^2 - t$, dann existiert in G ein perfektes Matching.

Aufgabe 3.4 [2+2 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie:

a) Sind M ein maximales Matching und M^* ein größtes Matching in G, so gilt $2|M| \geq |M^*|$.

b) Sei G zudem bipartit mit $V = A \dot{\cup} B$. Dann hat G ein perfektes Matching genau dann, wenn $|A| = |B|$ und $\forall\, S \subset A:\ |S| \leq |N(S)|$.

Abgabe: bis Montag, 14:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.
Bitte notieren Sie auf Ihrer Abgabe:

- **Name(n), Vorname(n),**
- **Matrikelnummer(n) und**
- **Rückgabeübungsgruppe**

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.

Die Abgabedaten von Blatt 3 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2013/PropDM`.