Propädeutikum Diskrete Mathematik (MA 1503)

Prof. Dr. R. Hemmecke | B.Sc. W. F. Riedl | Dipl-Math. M. Silbernagl

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1 [1+2+3+1]

Es sei $\ell(G)$ die Anzahl Blätter in einem Graph G, und T ein Baum auf mindestens 2 Knoten.

a) Es sei x ein Blatt von T, das zu einem Knoten y mit Grad $deg(y) \geq 3$ benachbart ist. Zeigen Sie, dass $|V(T-x)| - \ell(T-x) = |V(T)| - \ell(T)$.

b) Folgern Sie, dass es einen Subgraphen $T' \subset T$ auf mindestens 2 Knoten gibt mit folgenden Eigenschaften:

(i) T' ist ein Baum;

(ii) jedes Blatt von T' ist zu einem Knoten mit Grad ≤ 2 benachbart;

(iii) $|V(T')| - \ell(T') = |V(T)| - \ell(T)$.

c) Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $\nu(T) \geq \frac{|V(T)|-\ell(T)+1}{2}$.

d) Geben Sie, für jedes $n \geq 3$, einen Baum an, für den diese Aussage sogar mit Gleichheit gilt.

Aufgabe 3.2 [3+2+3]

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit zugehöriger Bipartition $V = A \dot\cup B$. Beweisen Sie:

a) Korollar 3.5 aus der Vorlesung: Gilt $|A| \leq |B|$ und $\deg(v) = a \in \mathbb{N}$ für alle $v \in A$ sowie $\deg(v) = b \in \mathbb{N}$ für alle $v \in B$, dann existiert ein Matching, das A vollständig überdeckt.

b) Existiert $d \in \mathbb{N}$, sodass $|N(S)| \geq |S| - d$ für alle Teilmengen $S \subset A$ gilt, dann existiert in G ein Matching, das mindestens $|A| - d$ Knoten aus A überdeckt.

Hinweis: Machen Sie den Beweis des Heiratssatzes nicht nach, sondern konstruieren Sie einen Hilfsgraphen G^*, auf den Sie den Heiratssatz anwenden können.

c) Gilt $|A| = |B| = t \in \mathbb{N}$ und $|E| > t^2 - t$, dann existiert in G ein perfektes Matching.

Aufgabe 3.3 [2+2 Punkte]

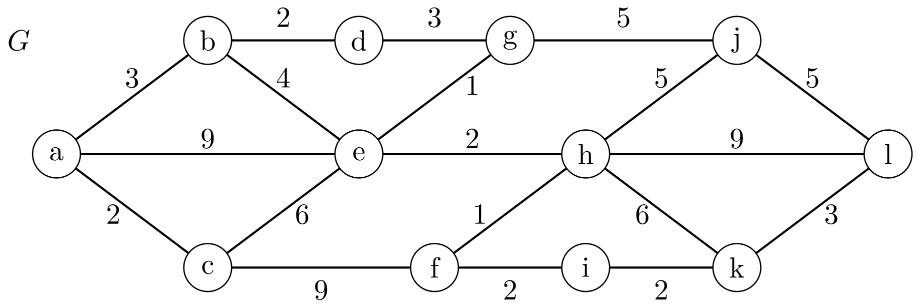
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie:

a) Sind M ein maximales Matching und M^* ein größtes Matching in G, so gilt $2|M| \geq |M^*|$.

b) Sei G zudem bipartit mit $V = A \dot\cup B$. Dann hat G ein perfektes Matching genau dann, wenn $|A| = |B|$ und $\forall\, S \subset A: \ |S| \leq |N(S)|$.

Aufgabe 3.4 [1+1.5+1.5]

a) Führen Sie den Algorithmus von Dijkstra mit Startknoten a für folgenden Graphen aus. Verwenden Sie dazu die in den Übungen vorgestellte Tabelle. Geben Sie außerdem einen kürzesten a, l-Weg an.



b) Der Algorithmus von Dijkstra erfordert nicht-negative Kantengewichte. Geben Sie einen gewichteten Graphen an, in dem es ein negatives Kantengewicht, aber keinen Kreis negativen Gesamtgewichtes gibt, für den der Algorithmus von Dijkstra falsche Abstände berechnet.

c) Kann das Problem aus Teil b) behoben werden, indem auf alle Gewichte ein hinreichend großer Wert addiert wird? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Abgabe: bis Mittwoch, 18:00 Uhr (nur Studierende der Lehramts-Gruppen!) im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Bitte notieren Sie auf ihrer Abgabe:

- **Name(n), Vorname(n),**
- **Matrikelnummer(n) und**
- **Rückgabeübungsgruppe**

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.

Die Abgabedaten von Blatt 3 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2013/PropDM`.