



Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1

[1+1+1+2]

- Lassen sich zu jedem Graphen Kanten hinzufügen, sodass es eine Eulertour gibt? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel mit Begründung an.
- Lassen sich zu jedem Graphen genau ein neuer Knoten und null oder mehr diesen Knoten enthaltende Kanten hinzufügen, so dass in dem neuen Graph jeder Knoten geraden Grad hat? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel mit Begründung an.
- Sei G ein beliebiger zusammenhängender Graph, welcher auch Knoten ungeraden Grades enthält. Sie wissen aus der Vorlesung, dass Sie dann in jedem alle Kanten von G benutzenden geschlossenen Kantenzug mindestens eine Kante mehrfach benutzen müssen. Angenommen, Sie wollen die Anzahl der Kantenmehrfachbenutzungen minimieren.
 - Beweisen oder widerlegen Sie: In jedem alle Kanten von G benutzenden und die Anzahl aller Kantenmehrfachbenutzungen minimierenden geschlossenen Kantenzug wird jede mehrfach benutzte Kante genau zweimal benutzt.
 - Führen Sie Ihr Minimierungsproblem auf die Suche nach einem kostenminimalen perfekten Matching in einem Hilfsgraphen mit gewichteten Kanten zurück, ohne Begründung.

Aufgabe 4.2

[4+2+1]

Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger Graph.

- Es seien $x, y \in V$ zwei nicht benachbarte Knoten mit $\deg(x) + \deg(y) \geq |V|$. Zeigen Sie: Wenn $G' := (V, E \cup \{\{x, y\}\})$ einen Hamiltonkreis enthält, dann auch G .

Hinweis:

Zeigen Sie, dass man aus einem Hamiltonkreis H von G' einen weiteren Hamiltonkreis erzeugen kann, indem man $\{x, y\}$ entfernt und eine weitere Kante aus H entfernt sowie zwei Kanten aus G hinzufügt.

- Folgern Sie aus a): Ist $|V| \geq 3$ und $\delta(G) \geq |V|/2$, dann enthält G einen Hamiltonkreis.
- Sei $k \in \mathbb{N}$. Geben Sie einen Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 2k + 1$ und $\delta(G) = k$ an, der keinen Hamiltonkreis enthält.

Aufgabe 4.3

[3]

Ein *Eulerzug* in einem Graphen G ist ein **nicht notwendigerweise geschlossener** Kantenzug, der jede Kante genau einmal benutzt. Geben Sie eine einfache, notwendige und hinreichende Bedingung an, wann G einen Eulerzug enthält. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4.4

[1+3]

Wir betrachten einen vollständigen Graphen $G = (V, \binom{V}{2})$ und eine Funktion $\ell: \binom{V}{2} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit der Eigenschaft, dass $\ell(\{u, w\}) \leq \ell(\{u, v\}) + \ell(\{v, w\})$ für jedes $(u, v, w) \in V^3$. (Dreiecksungleichung für gewichtete Graphen)

Sei H ein beliebiger Hamiltonkreis in G mit kleinster ℓ -Gesamtlänge. Sei T ein beliebiger aufspannender Baum in G mit kleinster ℓ -Gesamtlänge. Bezeichne $\ell(H)$ (bzw. $\ell(T)$) die ℓ -Gesamtlänge von H (bzw. von T). Zeigen Sie:

- a) $\ell(T) \leq \ell(H)$,
- b) $\ell(H) \leq 2\ell(T)$.

Hinweis: Zeigen Sie: Aus einem geschlossenen Kantenzug, der jeden Knoten *mindestens* einmal besucht, kann in G ohne Gewichtszunahme ein Hamiltonkreis erzeugt werden.

Abgabe: bis Montag, 14:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.
Bitte notieren Sie auf Ihrer Abgabe:

- Name(n), Vorname(n),
- Matrikelnummer(n) und
- Rückgabeübungsgruppe

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.

Die Abgabedaten von Blatt 4 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter <http://www-m9.ma.tum.de/WS2013/PropDM>.