Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Propädeutikum Diskrete Mathematik (MA 1503)

Prof. Dr. R. Hemmecke | B.Sc. W. F. Riedl | Dipl-Math. M. Silbernagl

Aufgabenblatt 4

Bitte beachten Sie, dass der Abgabetermin für Blatt 4 auf Grund der Weihnachtsferien schon am 23.12. um 14:00 Uhr ist.

Aufgabe 4.1 [1+1+1+2]

a) Lassen sich zu jedem Graphen Kanten hinzufügen, sodass es eine Eulertour gibt? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel mit Begründung an.

b) Lassen sich zu jedem Graphen genau ein neuer Knoten und null oder mehr diesen Knoten enthaltende Kanten hinzufügen, so dass in dem neuen Graph jeder Knoten geraden Grad hat? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel mit Begründung an.

c) Sei G ein beliebiger zusammenhängender Graph, welcher auch Knoten ungeraden Grades enthält. Sie wissen aus der Vorlesung, dass Sie dann in jedem alle Kanten von G benutzenden geschlossenen Kantenzug mindestens eine Kante mehrfach benutzen müssen. Angenommen, Sie wollen die Anzahl der Kantenmehrfachbenutzungen minimieren.

   i) Beweisen oder widerlegen Sie: In jedem alle Kanten von G benutzenden und die Anzahl aller Kantenmehrfachbenutzungen minimierenden geschlossenen Kantenzug wird jede mehrfach benutzte Kante genau zweimal benutzt.

   ii) Führen Sie Ihr Minimierungsproblem auf die Suche nach einem kostenminimalen perfekten Matching in einem Hilfsgraphen mit gewichteten Kanten zurück, ohne Begründung.

Aufgabe 4.2 [4+2+1]

Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger Graph.

a) Es seien $x, y \in V$ zwei nicht benachbarte Knoten mit $\deg(x) + \deg(y) \geq |V|$. Zeigen Sie: Wenn $G' := (V, E \cup \{\{x, y\}\})$ einen Hamiltonkreis enthält, dann auch G.

   Hinweis:
   Zeigen Sie, dass man aus einem Hamiltonkreis H von G' einen weiteren Hamiltonkreis erzeugen kann, indem man $\{x, y\}$ und eine weitere Kante aus H entfernt sowie zwei Kanten aus G zu H hinzufügt.

b) Folgern Sie aus a): Ist $|V| \geq 3$ und $\delta(G) \geq |V|/2$, dann enthält G einen Hamiltonkreis.

c) Sei $k \in \mathbb{N}$. Geben Sie einen Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 2k + 1$ und $\delta(G) = k$ an, der keinen Hamiltonkreis enthält.

Aufgabe 4.3 [1+3]

Wir betrachten einen vollständigen Graphen $G = (V, \binom{V}{2})$ und eine Funktion $\ell\colon \binom{V}{2} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit der Eigenschaft, dass $\ell(\{u, w\}) \leq \ell(\{u, v\}) + \ell(\{v, w\})$ für jedes $(u, v, w) \in V^3$. (Dreiecksungleichung für gewichtete Graphen)

Sei H ein beliebiger Hamiltonkreis in G mit kleinster ℓ-Gesamtlänge. Sei T ein beliebiger aufspannender Baum in G mit kleinster ℓ-Gesamtlänge. Bezeichne $\ell(H)$ (bzw. $\ell(T)$) die ℓ-Gesamtlänge von H (bzw. von T). Zeigen Sie:

Bitte wenden!

a) $\ell(T) \leq \ell(H)$,

b) $\ell(H) \leq 2\ell(T)$.

Hinweis: Zeigen Sie: Aus einem geschlossenen Kantenzug, der jeden Knoten *mindestens* einmal besucht, kann in G ohne Gewichtszunahme ein Hamiltonkreis erzeugt werden.

Aufgabe 4.4 [1.5+2.5]

a) Führen Sie den Algorithmus von Prim mit Startknoten a für den unten abgebildeten Graphen G aus. Verwenden Sie dazu die in den Übungen vorgestellte Tabelle. Geben Sie außerdem den berechneten Baum und sein Gewicht an.

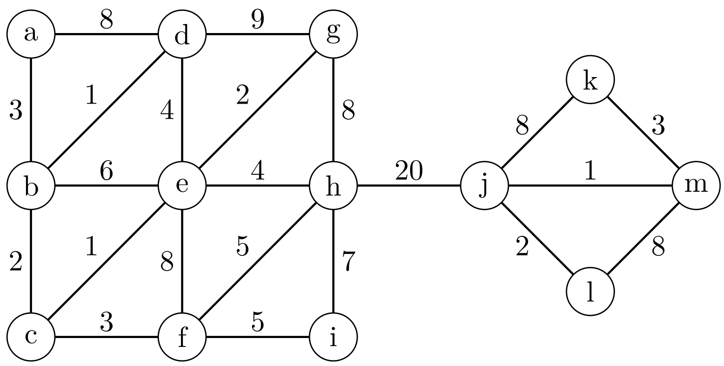
b) Sind die folgenden Aussagen über den unten abgebildeten Graphen G wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

   i) Jeder leichteste Spannbaum in G verwendet die Kante $\{h, j\}$, die maximales Gewicht hat.

   ii) Es gibt einen leichtesten Spannbaum in G, der die Kante $\{f, i\}$ nicht verwendet.

   iii) Für alle zusammenhängenden Graphen ist der Kürzeste Wege Baum, den der Algorithmus von Dijkstra berechnet, ein leichtester Spannbaum.

G



Abgabe: bis Montag (23.12.), 14:00 Uhr (nur Studierende der Lehramts-Gruppen!) im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Bitte notieren Sie auf ihrer Abgabe:

- **Name(n), Vorname(n),**
- **Matrikelnummer(n) und**
- **Rückgabeübungsgruppe**

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.

Die Abgabedaten von Blatt 4 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2013/PropDM`.