Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Propädeutikum Diskrete Mathematik (MA 1501)

Prof. Dr. R. Hemmecke | B.Sc. W. F. Riedl | Dipl-Math. M. Silbernagl

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 [2+3+3+3]

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und P_n die partielle Ordnung auf der Menge $[3n]$ mit den vergleichbaren Paaren

$$\begin{aligned} P_n = \quad & \{1,\ldots,n\} \times \{n+1,\ldots,2n\} \\ & \cup \{n+1,\ldots,2n\} \times \{2n+1,\ldots,3n\} \\ & \cup \{1,\ldots,n\} \times \{2n+1,\ldots,3n\} \\ & \cup \{(i,i) : i \in [3n]\} \subset [3n] \times [3n]. \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm von P_2.

b) Geben Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Elemente in einer größten Antikette von P_n an. (Mit Begründung!)

c) Zeichnen Sie, für $n = 2$, die Hasse-Diagramme von linearen (d.h. vollständigen) Erweiterungen $L_1, \ldots, L_k$ von P_2, so dass
$$P_2 = L_1 \cap \ldots \cap L_k$$
gilt und k möglichst klein ist.

d) Geben Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ das kleinste $k \in \mathbb{N}$ an, so dass $P_n = L_1 \cap \ldots \cap L_k$ geschrieben werden kann. Begründen Sie die Minimalität von k.

Aufgabe 5.2 [1+2+2]

Seien $a, b \in [n]^2$ mit $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ und $a \preceq_R b$, falls $a_i \leq b_i$, $i = 1, 2$.

a) Zeigen Sie, dass „$\preceq_R$“ eine partielle Ordnung auf $[n]^2$ ist.

b) Geben Sie eine möglichst große Kette und eine zugehörige Partitionierung von $[n]^2$ in eine minimale Anzahl von Antiketten an.

c) Geben Sie eine lineare Erweiterung R' von R an.

Aufgabe 5.3 [3+2 Punkte]

Es sei R eine partielle Ordnung von n Elementen. Beweisen Sie:

a) Ist R nicht linear, so gibt es mindestens zwei verschiedene lineare Erweiterungen von R.

b) Ist $|R| = (n + \binom{n}{2}) - k$, dann gibt es höchstens 2^k verschiedene lineare Erweiterungen von R.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.4 [1+1+1+1+2]

Es sei $(Y, \preceq)$ eine partielle Ordnung, X eine Menge und $f : X \to Y$ eine injektive Abbildung. Zeigen Sie:

a) Die binäre Relation $\preceq_f := \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) \preceq f(x_2)\}$ ist eine partielle Ordnung auf X.

b) Ist $\mathcal{A} \subset Y$ eine Antikette in $(Y, \preceq)$, so ist $f^{-1}(\mathcal{A})$ eine Antikette in $(X, \preceq_f)$.

Offensichtlich ist $(\mathcal{P}([n]), \subset)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine partielle Ordnung. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \{0,1\}^n \to \mathcal{P}([n]), \quad (i_1, \ldots, i_n) \mapsto \{j \in [n] : i_j = 1\}.$$

c) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist (indem Sie z.B. die Umkehrabbildung angeben).

d) Nach Teil a) und c) ist $(\{0,1\}^n, \preceq_f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine partielle Ordnung. Zeichnen Sie für $n = 3$ das Hasse-Diagramm von $(\{0,1\}^3, \preceq_f)$.

e) Geben Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ eine längste Antikette in $(\{0,1\}^n, \preceq_f)$ an.

Abgabe: bis Montag, 14:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.
Bitte notieren Sie auf Ihrer Abgabe:

- **Name(n), Vorname(n),**
- **Matrikelnummer(n) und**
- **Rückgabeübungsgruppe**

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.

Die Abgabedaten von Blatt 5 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2013/PropDM`.