Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Propädeutikum Diskrete Mathematik (MA 1503)

Prof. Dr. R. Hemmecke | B.Sc. W. F. Riedl | Dipl-Math. M. Silbernagl

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1 [2+3+3+3]

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und P_n die partielle Ordnung auf der Menge $[3n]$ mit den vergleichbaren Paaren

$$\begin{aligned} P_n = \quad & \{1,\dots,n\} \times \{n+1,\dots,2n\} \\ & \cup \{n+1,\dots,2n\} \times \{2n+1,\dots,3n\} \\ & \cup \{1,\dots,n\} \times \{2n+1,\dots,3n\} \\ & \cup \{(i,i) : i \in [3n]\} \subset [3n] \times [3n]. \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm von P_2.

b) Geben Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Elemente in einer größten Antikette von P_n an. (Mit Begründung!)

c) Zeichnen Sie, für $n = 2$, die Hasse-Diagramme von linearen (d.h. vollständigen) Erweiterungen $L_1, \dots, L_k$ von P_2, so dass
$$P_2 = L_1 \cap \ldots \cap L_k$$
gilt und k möglichst klein ist.

d) Geben Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ das kleinste $k \in \mathbb{N}$ an, so dass $P_n = L_1 \cap \ldots \cap L_k$ geschrieben werden kann. Begründen Sie die Minimalität von k.

Aufgabe 5.2 [3+2 Punkte]

Es sei R eine partielle Ordnung von n Elementen. Beweisen Sie:

a) Ist R nicht linear, so gibt es mindestens zwei verschiedene lineare Erweiterungen von R.

b) Ist $|R| = (n + \binom{n}{2}) - k$, dann gibt es höchstens 2^k verschiedene lineare Erweiterungen von R.

Aufgabe 5.3 [1+2+2]

Seien $a, b \in [n]^2$ mit $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ und $a \preceq_R b$, falls $a_i \leq b_i$, $i = 1, 2$.

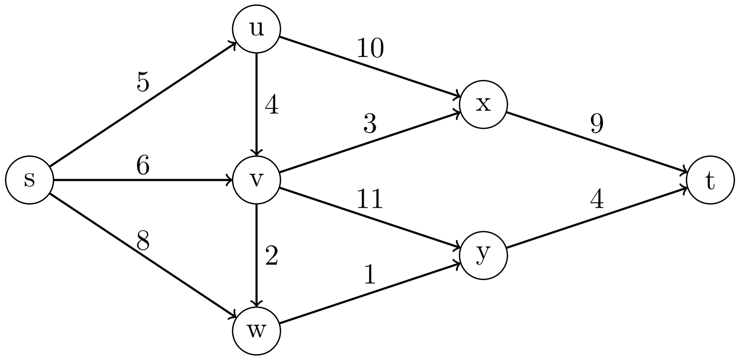
a) Zeigen Sie, dass „$\preceq_R$“ eine partielle Ordnung auf $[n]^2$ ist.

b) Geben Sie eine möglichst große Kette und eine zugehörige Partitionierung von $[n]^2$ in eine minimale Anzahl von Antiketten an.

c) Geben Sie eine lineare Erweiterung R' von R an.

Aufgabe 5.4 [2+2+2]

Die folgende Abbildung zeigt ein Netzwerk $N = (V, A, s, t, c)$ mit seiner Kapazitätsfunktion c.



Auf einigen Netzwerkkanten ist eine nicht-negative Funktion f gegeben durch

Kante (a,b)	(s,u)	(s,v)	(s,w)	(u,v)	(w,y)	(x,t)
$f(a,b)$	5	6	0	0	1	7

a) Setzen Sie f auf den übrigen Netzwerkkanten so fort, dass f einen Fluss definiert. Welchen Wert hat dieser Fluss?

b) Stellen Sie das zu f gehörende Restnetzwerk N_f auf. Finden Sie einen gerichteten s,t-Weg in N_f und erhöhen Sie den Fluss entlang dieses Weges um den maximal möglichen Betrag.

c) Hat der so gefundene Fluss maximalen Wert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: bis Mittwoch, 18:00 Uhr (nur Studierende der Lehramts-Gruppen!) im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Bitte notieren Sie auf ihrer Abgabe:

- **Name(n), Vorname(n),**
- **Matrikelnummer(n) und**
- **Rückgabeübungsgruppe**

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.

Die Abgabedaten von Blatt 5 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2013/PropDM`.