Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Propädeutikum Diskrete Mathematik (MA 1501)

Prof. Dr. R. Hemmecke | B.Sc. W. F. Riedl | Dipl-Math. M. Silbernagl

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 6.1 [2+2]

Sei M eine Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen.

a) Wie viele verschiedene Relationen $R \subset M \times M$ gibt es?

b) Wie viele davon sind Funktionen?
(Eine Relation $f \subset M \times M$ heißt Funktion, falls zu jedem $x \in M$ ein $y \in M$ existiert, so dass $(x, y) \in f$, und falls für alle $x, y_1, y_2 \in M$ gilt: $(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.)

Aufgabe 6.2 [2+2+2]

a) Es gibt 350 Studenten, die eine Klausur schreiben sollen. Die Klausur findet in zwei Räumen statt, welche jeweils 175 Studierenden Platz bieten.

   (i) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Studenten auf die Räume aufzuteilen?

   (ii) Unter den 350 Studenten gibt es 5 Zwillingspaare, die nicht im gleichen Raum die Klausur schreiben dürfen. Wie viele Möglichkeiten sind jetzt zulässig?

b) In einer Reihe mit 25 Plätzen sitzen zufällig 3 Studenten, die alle Geburtstag haben. Wie viele Anordnungen der 25 Studenten in dieser Reihe gibt es, wenn keine 2 der 3 Geburtstagskinder nebeneinander sitzen sollen?

c) Auf wie viele Arten kann ein König auf einem 8×8-Schachbrett von der linken unteren Ecke in die rechte obere Ecke ziehen, wenn er dabei pro Zug entweder ein Feld nach rechts, ein Feld nach oben oder ein Feld (diagonal) nach rechts-oben ziehen darf?

Aufgabe 6.3 [2+3]

a) Beweisen Sie Lemma 9.4 (f) der Vorlesung:

$$\sum_{l=0}^{m} \binom{n}{l} \binom{k}{m-l} = \binom{n+k}{m} \text{ für alle } m, k \in \mathbb{N}.$$

b) Wie viele k-elementige Teilmengen von $[n]$ gibt es, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten?

   Hinweis: Es sei $\{a_1, \ldots, a_k\}$ so eine Teilmenge mit $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Ordnen Sie dieser Teilmenge die Menge $\{a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, \ldots, a_k - (k-1)\}$ zu und benutzen Sie Lemma 8.4.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.4 [4+5]

Die Eulersche $\varphi-$Funktion ist so definiert, dass $\varphi(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ angibt, wie viele Zahlen in $[n]$ zu n teilerfremd sind. Zeigen Sie:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_t}\right).$$

Dabei sind die p_i gerade die Primteiler von n.

Hinweis: Verwenden Sie Inklusion – Exklusion und ohne Beweis:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_t) = \sum_{I \subset [t]} \left(\prod_{i \in I} a_i\right)$$

Abgabe: bis Montag, 14:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.
Bitte notieren Sie auf Ihrer Abgabe:

- **Name(n), Vorname(n),**
- **Matrikelnummer(n) und**
- **Rückgabeübungsgruppe**

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.

Die Abgabedaten von Blatt 6 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2013/PropDM`.