



## Aufgabenblatt 6

### Aufgabe 6.1

[2+2]

Sei  $M$  eine Menge mit  $n \in \mathbb{N}$  Elementen.

- Wie viele verschiedene Relationen  $R \subset M \times M$  gibt es?
- Wie viele davon sind Funktionen?  
(Eine Relation  $f \subset M \times M$  heißt Funktion, falls zu jedem  $x \in M$  ein  $y \in M$  existiert, so dass  $(x, y) \in f$ , und falls für alle  $x, y_1, y_2 \in M$  gilt:  $(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$ .)

### Aufgabe 6.2

[2+2+2]

- Es gibt 350 Studenten, die eine Klausur schreiben sollen. Die Klausur findet in zwei Räumen statt, welche jeweils 175 Studierenden Platz bieten.
  - Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Studenten auf die Räume aufzuteilen?
  - Unter den 350 Studenten gibt es 5 Zwillingspaare, die nicht im gleichen Raum die Klausur schreiben dürfen. Wie viele Möglichkeiten sind jetzt zulässig?
- In einer Reihe mit 25 Plätzen sitzen zufällig 3 Studenten, die alle Geburtstag haben. Wie viele Anordnungen der 25 Studenten in dieser Reihe gibt es, wenn keine 2 der 3 Geburtstagskinder nebeneinander sitzen sollen?
- Auf wie viele Arten kann ein König auf einem  $8 \times 8$ -Schachbrett von der linken unteren Ecke in die rechte obere Ecke ziehen, wenn er dabei pro Zug entweder ein Feld nach rechts, ein Feld nach oben oder ein Feld (diagonal) nach rechts-oben ziehen darf?

### Aufgabe 6.3

[2+2]

- Beweisen Sie Lemma 9.4 (f) der Vorlesung:

$$\sum_{l=0}^m \binom{n}{l} \binom{k}{m-l} = \binom{n+k}{m} \text{ für alle } m, k \in \mathbb{N}.$$

- Verwenden Sie die Inklusions-Exklusions-Formel um folgende Fragen zu beantworten. Bitte begründen Sie Ihr Ergebnis kurz.
  - Wie viele Zahlen in  $[3000]$  sind durch 2 oder 5 teilbar?
  - Wie viele Zahlen in  $[621126]$  sind durch 6 oder 21 teilbar?

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 6.4**

[1+3+2]

- a) Wie viele verschiedene TSP-Touren gibt es in  $K_n$ ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- b) Ziel dieser Teilaufgabe ist es zwei Rundreisen durch die neun größten bayrischen Städte zu finden: München (M), Nürnberg (N), Augsburg (A), Regensburg (R), Würzburg (W), Ingolstadt (I), Fürth (F), Erlangen (E), Bayreuth (B). Folgende Tabelle gibt die Luftlinienentfernungen zwischen diesen Städten in Kilometern an.

	M	N	A	R	W	I	F	E	B
M	0	150	57	105	220	70	155	167	201
N	150	0	122	89	91	81	7	17	65
A	57	122	0	115	174	59	124	138	182
R	105	89	115	0	180	57	96	103	110
W	220	91	174	180	0	158	84	81	119
I	70	81	59	57	158	0	86	98	132
F	155	7	124	96	84	86	0	14	67
E	167	17	138	103	81	98	14	0	56
B	201	65	182	110	119	132	67	56	0

Sei  $G = (V, E)$  der vollständige Graph mit der Knotenmenge  $V = \{M, N, A, R, W, I, F, E, B\}$ . Weiter sei  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine Gewichtsfunktion, wobei  $l(\{X, Y\})$  die Luftlinienentfernung zwischen den Städten  $X$  und  $Y$  ist.

- i) Verwenden Sie die NN-Heuristik mit Start in  $M$ , um in  $G$  eine TSP-Tour zu finden. Welche Länge hat die gefundene Tour?
- ii) Verwenden Sie die MST-Heuristik um in  $G$  eine TSP-Tour zu finden. Wählen Sie  $M$  als Startknoten für den Algorithmus von Prim und den geschlossenen Kantenzug. Welche Länge hat die gefundene Tour?
- c) Zeigen Sie, dass die NN-Heuristik beliebig schlechte Touren liefern kann. D.h. finden Sie für jedes  $r \in \mathbb{N}$  einen vollständigen Graphen  $G_r$ , sodass  $l(H_{\text{NN}}(G_r)) \geq r \cdot l(H_{\text{opt}}(G_r))$  ist.

**Abgabe: bis Mittwoch, 18:00 Uhr (nur Studierende der Lehramts-Gruppen!) im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.**

**Bitte notieren Sie auf ihrer Abgabe:**

- Name(n), Vorname(n),
- Matrikelnummer(n) und
- Rückgabeübungsgruppe

**Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.**

**Die Abgabedaten von Blatt 6 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter <http://www-m9.ma.tum.de/WS2013/PropDM>.**