Propädeutikum Diskrete Mathematik (MA 1501)

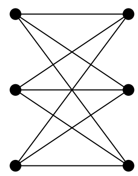
Prof. Dr. R. Hemmecke | B.Sc. W. F. Riedl | Dipl-Math. M. Silbernagl

Weihnachtsblatt

Aufgabe W.1

a) Wie viele Kanten kann ein bipartiter, planarer Graph auf n Knoten höchstens haben? Geben Sie eine scharfe Schranke mit Begründung an.

b) Wir bezeichnen mit $K_{3,3}$ den vollständigen bipartiten Graph, dessen Partitionsklassen jeweils 3 Knoten enthalten. Zeigen Sie, dass $K_{3,3}$ nicht planar ist.



$K_{3,3}$

Aufgabe W.2

Zeigen Sie, dass für $k \geq 2$ gilt:

a) Für eine natürliche Zahl k definieren wir $[k] := \{1, 2, \ldots, k\}$. Ist $G = (V, E)$ ein Graph mit $\chi(G) = k$ und ist $f : V \to [k]$ eine k-Färbung von G, dann gibt es für jedes $c \in [k]$ einen Knoten $v \in V$, sodass $f(v) = c$ und $f(N(v)) = [k] \setminus \{c\}$.

b) Es existiert ein Graph G_k mit $\omega(G_k) = 2$ und $\chi(G_k) \geq k$. Konstruieren Sie die Graphen G_k hierfür rekursiv, sodass der neue Graph den alten Graphen als Subgraphen enthält.

Hinweis: Wie lässt sich das Ergebnis aus Teil a) verwenden, um eine bestimmte Farbe für einen (neuen) Knoten zu erzwingen?

Aufgabe W.3

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $q(H)$ die Anzahl derjenigen Zusammenhangskomponenten eines Graphen H, die eine ungeraden Anzahl von Knoten haben, und $\nu(G)$ die Größe eines größten Matching in G. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Gleichung

$$|V| - 2\nu(G) = \max\{q(G - S) - |S| : S \subset V\},$$

zu beweisen, die manchmal *Defektformel von Berge* genannt wird. Sie ist eine Verallgemeinerung des berühmten Satzes von Tutte über perfekte Matchings in beliebigen Graphen. Gehen Sie dazu so vor:

a) Zeigen Sie zunächst, dass in der obigen Gleichung $\geq$ gilt.

Die umgekehrte Ungleichung soll nun durch Induktion über $|V|$ bewiesen werden.

b) Führen Sie den Induktionsanfang durch.

Bitte wenden!

Betrachten Sie im Induktionsschritt eine Teilmenge $S \subset V$, die $q(G-S) - |S|$ maximiert und unter allen solchen Teilmengen maximale Kardinalität hat.

c) Zeigen Sie, dass alle Zusammenhangskomponenten von $G - S$ eine ungerade Anzahl von Knoten enthalten.

d) Benutzen Sie die Induktionsannahme um zu zeigen, dass für jede Zusammenhangskomponente $W = (V_W, E_W)$ von $G - S$ und jeden Knoten $x \in V_W$, der Graph $W - x$ ein perfektes Matching besitzt.

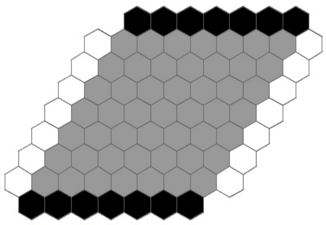
e) Betrachten Sie einen bipartiten Hilfsgraphen B, dessen eine Knotenklasse aus den Knoten von S und dessen andere Knotenklasse einen Knoten w für jede Zusammenhangskomponente W von $G - S$ enthält. Ein Knoten $s \in S$ wird in B durch eine Kante mit einem Knoten w verbunden, wenn s einen Nachbarn in W hat. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Hall, dass B ein Matching besitzt, das alle Knoten von S überdeckt.

f) Folgern Sie die gesuchte Ungleichung.

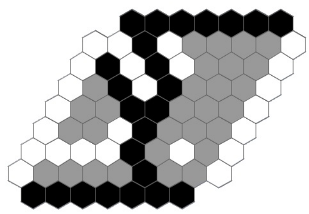
Aufgabe W.4

Hex wird auf einem rautenförmigen Spielbrett B gespielt (siehe Abbildung unten). Die Randfelder links und rechts sind weiß, die unten und oben schwarz. Die eigentlichen Spielfelder sind zunächst grau. Im Spiel färben die Spieler abwechselnd je ein noch graues Feld weiß beziehungsweise schwarz. Gewonnen hat, wer zuerst einen Weg in seiner Farbe zwischen den Seiten seiner Farbe erzeugt hat.

Das Spielbrett:



Schwarz gewinnt:



Das Spiel endet unentschieden, falls alle Felder schwarz oder weiß gefärbt sind und keiner der Spieler gewonnen hat. Ziel der Aufgabe ist es zu beweisen, dass ein Unentschieden unmöglich ist. Dazu nehmen wir an, dass B vollständig gefärbt ist und konstruieren folgende Neufärbung von B: Alle schwarzen Felder, die vom unteren Rand über schwarze Felder erreichbar sind, färben wir rot. Alle weißen Felder, die vom linken Rand über weiße Felder erreichbar sind, färben wir grün. Alle übrigen Felder färben wir blau. Außerdem konstruieren wir für die Ecken V und die Kanten K der Sechseck-Felder von B folgende Menge $R \subset V \times K$: Für $v \in V$ und $k \in K$ gelte $(v, k) \in R$ genau dann, wenn v Endpunkt von k ist *und* k zwischen einem roten und einem grünen Feld verläuft.

a) Zeigen Sie, dass für jede Kante $k \in K$ gilt, dass $|\{v \in V : (v, k) \in R\}|$ gerade ist.

b) Zeigen Sie, dass es bei einem Unentschieden genau eine Ecke $v \in V$ gibt, für die $|\{k \in K : (v, k) \in R\}|$ ungerade ist.

c) Schlussfolgern Sie, dass ein Unentschieden bei Hex nicht auftreten kann.

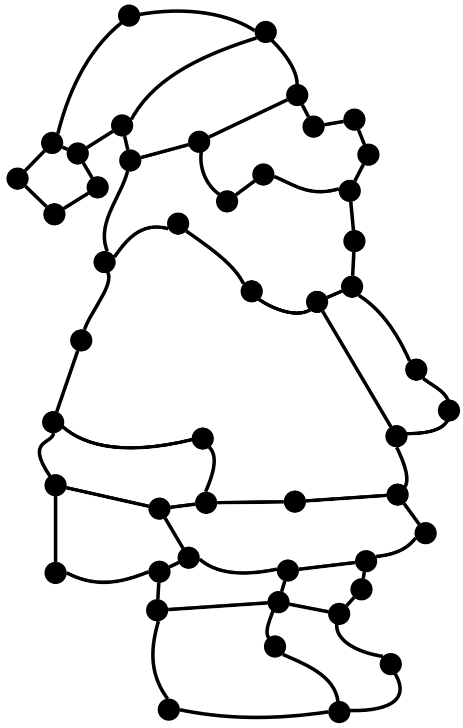
Aufgabe W.5

Gegeben sei ein Schachbrett B der Größe $2^n \times 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$), aus dem die obere rechte Ecke ausgeschnitten wird, und außerdem ein Dominostein L, der genau die Felder $a1, a2, b1$ des Schachbrettes überdecken kann. Zeigen Sie, dass B vollständig mit nichtüberlappenden Kopien von L bedeckt werden kann.

. . . Fortsetzung auf der nächsten Seite . . .

Aufgabe W.6

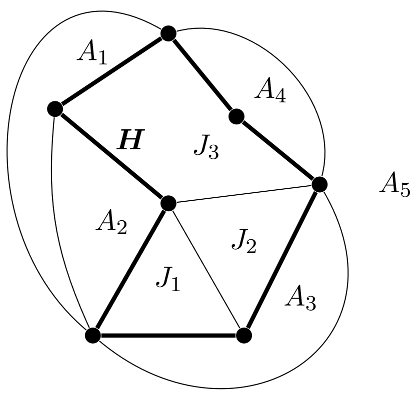
Wie jedes Jahr plant der Weihnachtsmann kurz vor Weihnachten seine Route zur Geschenkeverteilung. Ein besonders problematischer Bezirk ist der folgende:



Bisher hat der Weihnachtsmann noch keine Route gefunden, welche jedes Haus genau einmal besucht und schlussendlich wieder an der Landestelle seines Schlittens endet. Dieses Jahr jedoch hat er ein Angebot seiner Weihnachtswichtel: Im Austausch gegen seinen gesamten Jahresvorrats an Plätzchen wollen sie ihm solch eine Route verraten. Der Weihnachtsmann ist unschlüssig, ob seine Wichteln wirklich so eine Route kennen, oder ob sie ihn nur um seine hart verdienten Vorräte bringen wollen.

a) Welches Problem behaupten die Wichtel gelöst zu haben?

Betrachten Sie den folgenden planaren Graphen sowie den eingezeichneten Kreis H:



Dieser zerlegt die Ebene offensichtlich in zwei Teilgebiete: das Innere J von H (bestehend aus J_1, J_2 und J_3) sowie das Äußere A von H (bestehend aus A_1 bis A_5).

Bitte wenden!

Sei weiterhin d die Kantenzahl im Innengebiet und j_t die Anzahl Teilgebiete von J, welche von t Kanten begrenzt werden. Analog sei D die Kantenzahl im Außengebiet A und a_t die Anzahl Teilgebiete von A, welche von t Kanten begrenzt werden. Im Beispiel: $d = 2$, $j_3 = 2$, $j_5 = 1$, $j_4 = j_6 = j_7 = 0$ sowie $D = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$.

b) Finden Sie einen Zusammenhang zwischen der Gesamtzahl der Teilgebiete von J ($\sum_{t=3}^{n} j_t$) und der inneren Kantenzahl d.

c) Jedes innere Gebiet wird von einer bestimmte Zahl von Kanten eingegrenzt. Die Summe $\sum_{t=3}^{n} t \cdot j_t$ zählt die Gesamtzahl dieser Eingrenzungen. Finden Sie einen Zusammenhang zwischen dieser Summe und der Anzahl der inneren Kanten d sowie der Kantenzahl n des Kreises H.

d) Wiederholen Sie diese beiden Schritte für das äußere Gebiet A mit seiner Kantenzahl D.

Nach einem langen Arbeitstag starrt der Weihnachtsmann bei einer gemütlichen Tasse Glühwein sehr lange auf die vier so erhaltenen Formeln. Plötzlich hat er einen Geistesblitz: sollten seine Wichtel es ehrlich mit ihm meinen und sollte die versprochene Tour existieren, muss für seinen Problembezirk die folgende Formel[1] gelten:

$$\sum_{t=3}^{n} (t-2)(j_t - a_t) = 0.$$

e) Helfen Sie dem übermüdeten Weihnachtsmann und nehmen Sie ihm die Begründung seiner Vermutung ab.

Am nächsten Morgen hat der Weihnachtsmann es sehr eilig, denn er muss mit der Geschenkeverteilung beginnen.

f) Soll er den Wichteln den Schlüssel zur Speisekammer aushändigen?

g) Während des Fluges erkennt er, dass die Formel für einen weiteren Bezirk eine Lösung besitzt. Weiß er deshalb, dass es eine für ihn günstige Rundtour gibt?

Aufgabe W.7

Ein *nachbarstörgeschalteter endlicher Weihnachtsbaum* ist eine Tanne, über die ein Stromleitungsnetz aus endlich vielen Leitungen gelegt wurde, an dessen (endlich-vielen) Knotenpunkten je eine Energiesparlampe angebracht ist. Jede Lampe hat anfangs den Zustand „an“. Jede Lampe kann nur entweder diesen Zustand, oder aber den Zustand „aus“ haben. An jeder Lampe ist ein Kippschalter (mit genau zwei möglichen Zuständen). Für jede Lampe hat Kippen des Kippschalters genau die folgende Wirkung: Der Zustand seiner Lampe *und aller im Leitungsnetz* benachbarten Lampen wechselt in den jeweils anderen Lampenzustand. Ein nachbarstörgeschalteter Weihnachtsbaum heißt *abschaltbar* genau dann, wenn eine endliche Sequenz von Kippschalterbetätigungen existiert, an deren Ende alle Lampen „aus“ sind.

Modellieren Sie das Wesentliche eines nachbarstörgeschalteten Weihnachtsbaumes in der Sprache der Graphentheorie und geben Sie einen Beweis für folgende Behauptung:

Jeder nachbarstörgeschaltete endliche Weihnachsbaum ist abschaltbar.

Warnung. Das ist keine einfache Aufgabe. Sowohl theoretische wie auch experimentelle Beschäftigung damit kann Ihre und anderer Energieressourcen über Gebühr strapazieren. Bitte haushalten Sie mit Energie.

[1] Auch bekannte als der Satz von Grinberg (*1911, †1982).

Das Team des Propädeutikums Diskrete Mathematik wünscht alles Gute für $\sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \left(\frac{2013}{2014}\right)^k$ **.**