Dipl.-Math.Oec Melanie Bestle | Dr. Michael Ritter

Kamm-Ungleichungen

1 Problembeschreibung

Problem: Traveling Salesman
Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Distanzfunktion $d : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Aufgabe: Finde eine Tour, die alle Knoten des Graphen G genau einmal besucht und deren Länge bezüglich d möglichst klein ist, oder stelle fest, dass keine solche Tour existiert. Der Begriff „Tour" wird hier synonym mit „Hamilton-Kreis" verwendet.

2 Das TSP-Polytop

Definition
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP sei $\mathcal{T}(G)$ die Menge aller Touren in G. Für jede Tour $\tau \in \mathcal{T}(G)$ bezeichnen wir mit $x^{(\tau)} \in \{0, 1\}^{|E|}$ den Inzidenzvektor der Kanten, die in der Tour τ verwendet werden. Dann heißt das Polytop

$$P_{TSP}(G) := \operatorname{conv}\left\{x^{(\tau)} : \tau \in \mathcal{T}(G)\right\}$$

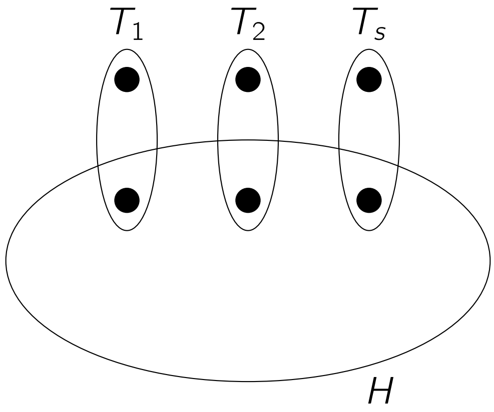
das *TSP-Polytop* zum Graphen G. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir auch einfach P_{TSP}. Für eine Kante $e \in E$ bezeichnet $x_e \in \{0, 1\}$ die zur Kante e gehörige Komponente von $x^{(\tau)}$.

Für eine Knotenteilmenge S bezeichnen wir mit $E(S)$ alle Kanten aus E, deren beide Enden in S liegen, und mit $\delta(S)$ alle Kanten aus E, bei denen genau ein Ende in S liegt:

$$E(S) := \{e \in E : |e \cap S| = 2\}$$
$$\delta(S) := \{e \in E : |e \cap S| = 1\}$$

3 Ungleichung

Definition
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP besteht ein *Kamm* aus einer Knotenmenge $H \subset V$ und paarweise disjunkten Knotenteilmengen $T_1, \dots, T_s \subset V$, wobei $s \geq 3$ ungerade, so dass $T_i \cap H \neq \emptyset$ und $T_i \setminus H \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \dots, s\}$. Wir nennen H den *Griff* und $T_1, \dots, T_s$ die *Zähne* des Kamms (vgl. Abbildung).



Die zu einem Kamm gehörige *Kamm-Ungleichung* lautet:

$$\sum_{e \in \delta(H)} x_e + \sum_{i=1}^{s} \sum_{e \in \delta(T_i)} x_e \geq 3s + 1$$

4 Gültigkeit der Ungleichung

Satz
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP sei $s \geq 3$ ungerade, $T_1, \ldots, T_s \subset V$ paarweise disjunkte Knotenteilmengen und $H \subset V$ so, dass $T_i \cap H \neq \emptyset$ und $T_i \setminus H \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$. Dann ist die Kammungleichung

$$\sum_{e \in \delta(H)} x_e + \sum_{i=1}^{s} \sum_{e \in \delta(T_i)} x_e \geq 3s + 1$$

eine gültige Ungleichung für das TSP-Polytop $P_{TSP}(G)$.

Beweis. Sei x Inzidenzvektor einer TSP-Tour in G. Da die Tour jeden Knoten aus V durchläuft, muss die Tour für jede Teilmenge von V mindestens zwei Kanten enthalten, die mit dieser Knotenmenge genau einen Knoten gemeinsam haben (denn die Tour muss in die Menge hineinführen und sie wieder verlassen). Dies gilt auch für die disjunkten Knotenmengen $T_i \setminus H$ und $T_i \cap H$ für jedes $i \in \{1, \ldots, s\}$. Daraus folgt

$$\sum_{e \in \delta(H) \cap E(T_i)} x_e + \sum_{e \in \delta(T_i)} x_e \geq 3.$$

Summiert man diese Ungleichungen über alle $i \in \{1, \ldots, s\}$ auf, so erhält man

$$\sum_{e \in \delta(H)} x_e + \sum_{i=1}^{s} \sum_{e \in \delta(T_i)} x_e \geq 3s.$$

Da die linke Seite gerade ist (Warum?) und die rechte Seite ungerade ist (denken Sie daran, dass $|S|$ ungerade war), folgt die Behauptung.