Dipl.-Math.Oec Melanie Bestle | Dr. Michael Ritter

Diving-Heuristiken für ILP

Als *Diving-Heuristiken* bezeichnet man eine Reihe von Algorithmen, die zulässige ganzzahlige Lösungen für ILPs generieren, indem sie systematisch Variablen auf ganzzahlige Werte fixieren und damit nach und nach versuchen, eine geeignete ganzzahlige Lösung zu gewinnen. Die Algorithmen eignen sich damit gut für die Startphase eines Branch and Bound-Ansatzes, um eine erste ganzzahlige Lösung zu erzeugen. (Erst mit einer Lösung hat man ja die Möglichkeit, Äste des Branch and Bound-Baums abzuschneiden.) Wir erläutern hier kurz die Idee dieser Technik und stellen verschiedene Ausprägungen von Diving-Heuristiken vor.

1 Problemstellung

Wir gehen zunächst von einem 0-1-ILP in folgender Form aus:

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

Wir bezeichnen den zulässigen Bereich der Relaxation mit P:

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ 0 \leq x \leq 1\}$$

Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir den komponentenweise gerundeten Vektor mit $[x] \in \{0,1\}^n$.

2 Grundidee

Diving-Heuristiken beginnen mit einer Lösung der LP-Relaxation und runden eine vorgegebene Anzahl von Variablen. Auf Grundlage dieser Teillösung wird erneut ein LP gelöst, bei dem die bereits gerundeten Komponenten fixiert werden. Man fährt nun fort, nach und nach Variablen zu runden und zu fixieren, bis man entweder eine ganzzahlige Lösung erhält oder das Problem unzulässig wird. Sollte dieser Fall eintreten, versucht man eine andere Heuristik oder gibt (nach einer gewissen Anzahl von Versuchen) die Suche auf und versucht einen anderen Ansatz. Algorithmus 1 fasst das Vorgehen zusammen.

3 Auswahlregeln für Diving-Heuristiken

Für die Wahl der jeweils zu fixierenden Variablen gibt es eine Reihe von Möglichkeiten. Wir stellen hier ein paar besonders häufig anzutreffende Methoden vor. In der Praxis kann es natürlich sinnvoll sein, die Auswahlregel dem speziellen Problem anzupassen.

Input: Anzahl $T \in \mathbb{N}$ von Variablen, die in jeder Runde fixiert werden, eine Auswahlregel
Output: Eine ganzzahlige, zulässige Lösung oder die Meldung „erfolglos abgebrochen"
Setze $P^{(0)} := P$, $i := 0$, $F := \emptyset$
while $P^{(i)} \neq \emptyset$ **do**
  Bestimme eine Lösung der aktuellen LP-Relaxation, d. h. $x^* := \operatorname{argmax}\left\{c^T x : x \in P^{(i)}\right\}$.
  Ist x^* ganzzahlig $\rightarrow$ Abbruch mit Lösung x^*
  Bestimme mit der Auswahlregel eine Indexmenge $J \subset \{1, \ldots, n\} \setminus F$ mit $|J| = T$ von Variablen, die fixiert werden sollen (falls weniger als T Indizes übrig sind, soll $J = \{1, \ldots, n\} \setminus F$ gelten).
  Setze $F := F \cup J$.
  Setze $P^{(i+1)} := \left\{x \in P^{(i)} : x_j = [x_j^*] \; \forall j \in J\right\}$.
  Setze $i := i + 1$.
end
Meldung „erfolgslos abgebrochen"

Algorithm 1: Diving-Heuristik

Fractional Diving

Definiere für jeden Index $j \in \{1, \ldots, n\}$ einen Score $\sigma_j(x) := |x_j - [x_j]|$ und wähle die T Variablen aus, für die $\sigma_j(x)$ am kleinsten ist. Die Idee hinter dieser Auswahlregel: Variablen, die ohnehin schon nahe an einer ganzen Zahl sind, können vermutlich gerundet werden, ohne die Zulässigkeit zu stark zu gefährden. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Heuristik wegen Unzulässigkeit abbricht, ist also gering.

Coefficient Diving

Für einen Index $j \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichnet man

$$U(j) := \{i \in \{1, \ldots, m\} : a_{ij} > 0\}$$

als die Menge der *Up-Locks* der Variable x_j. Für die Auswahl der zu fixierenden Variablen wählt man nun die Variablen, die eine möglichst kleine Up-Lock-Menge besitzen.

Vectorlength Diving

Vectorlength Diving ist eine speziell auf Set Partitioning-Probleme zugeschnittene Auswahlregel. Ein *Set Partitioning*-Problem ist ein ILP der Form

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax = \mathbb{1} \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

mit $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$. Im Unterschied zu bisher betrachten wir also Gleichheits-Nebenbedingungen mit rechter Seite 1 und eine 0-1-Matrix A.

In Set Partitioning-Problemen kann nie (außer bei trivialer Matrix A) eine einzelne fraktionelle Variable auftreten. Wäre das der Fall, so betrachten wir eine Gleichungszeile, in der die Variable vorkommt. Da die Summe insgesamt 1 sein muss, brauchen wir in dieser Zeile noch mindestens eine weitere fraktionelle Variable. Umgekehrt heißt das aber auch: Rundet man eine fraktionelle Variable auf 0, so kann man hoffen, dass auch andere Variablen automatisch ganzzahlig werden. Rundet man auf 1, so werden sogar alle Variablen, die mit der gerundeten in einer Gleichungszeile vorkommen, automatisch auf 0 gesetzt.

Für eine Zahl $0 \leq \xi \leq 1$ und $c_j \in \mathbb{Z}$ setze

$$\langle \xi \rangle_{c_j} := \begin{cases} \lfloor \xi \rfloor, & \text{falls } c_j \geq 0, \\ \lceil \xi \rceil, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir berechnen für den Zielfunktionsvektor c und jede Komponente x_j^* einer LP-Lösung x^* nun den *vectorlength score*

$$\nu_j := \frac{(x_j^* - \langle x_j^* \rangle_{c_j}) \cdot c_j}{\left|\{i \in \{1, \ldots, m\} : a_{ij} \neq 0\}\right|}$$

und wählen die T Stück Variablen mit minimalem Score ν_j. Die Auswahlregel berücksichtigt also zwei Größen.

4 Fragen

In den folgenden Fragen befassen Sie sich eingehender mit den eben erarbeiteten Methoden. Diskutieren Sie die Fragen in der Gruppe und halten Sie Ihre Ergebnisse in Stichworten fest.

1. Warum könnte *coefficent diving* eine sinnvolle Auswahlregel darstellen? Welches Ziel wird Ihrer Meinung nach mit dieser Regel verfolgt? Erläutern Sie, warum dieses Ziel das Finden einer ganzzahligen, zulässigen Lösung unterstützen könnte.
2. Im *vectorlength diving* werden zwei Ziele gegeneinander gewichtet. Welche Zielrichtung bilden jeweils der Nenner und der Zähler des Scores ν_j ab?
3. Wo sehen Sie Vor- und Nachteile der verschiedenen Auswahlregeln?