

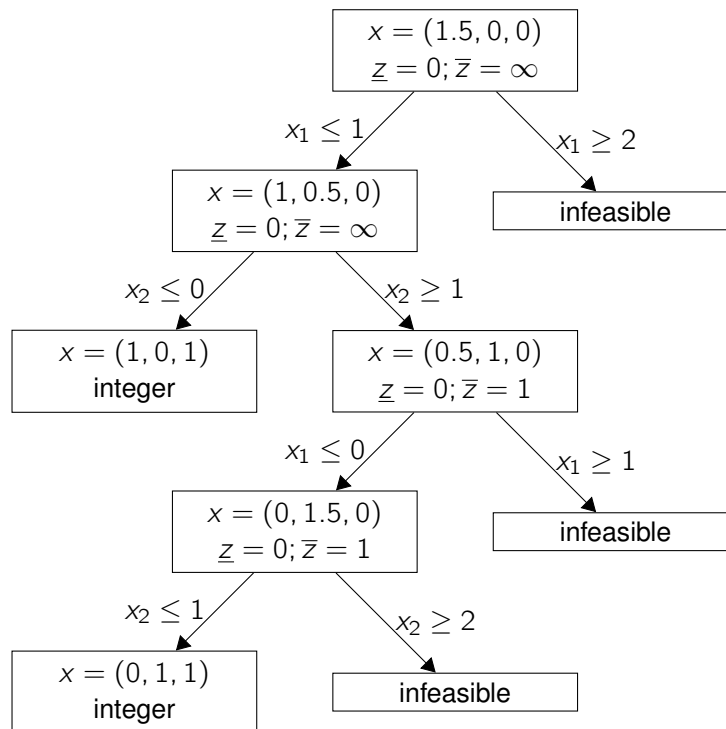


## 1 Beispiel

Wir betrachten folgendes Ganzzahliges Lineares Problem:

$$\begin{aligned} \min x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2n + 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Lösen wir dieses Problem für  $n = 1$  mit dem konventionellen Branch&Bound Verfahren, d.h. wir verzweigen über die Variablen  $x_1, x_2$  und  $x_3$ , so ergibt sich folgender Baum:



Der Baum hat vier nicht-ganzzahlige Knoten mit den Lösungen, zwei ganzzahlige Knoten, und zwei unzulässige Knoten. Für allgemeines  $n$  hat der Baum  $n + 1$  nicht-ganzzahlige Knoten mit den Lösungen

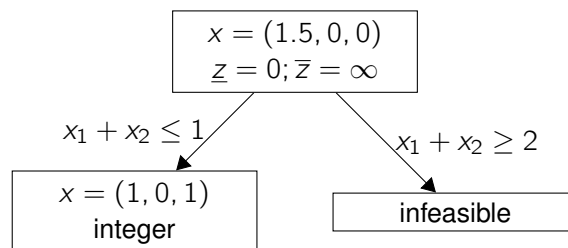
$$\left(\frac{2n+1}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{2n}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{2n-1}{2}, \frac{2}{2}, 0\right), \left(\frac{2n-2}{2}, \frac{3}{2}, 0\right), \dots, \left(\frac{1}{2}, \frac{2n}{2}, 0\right), \left(0, \frac{2n+1}{2}, 0\right),$$

$n$  ganzzahlige Knoten mit den Lösungen

$$(n, 0, 1), (n-1, 1, 1), \dots, (1, n-1, 1), (0, n, 1),$$

und  $n + 1$  unzulässige Knoten. Beim Baum wurde an keiner Stelle abgeschnitten.

Statt über die einzelnen Variablen hätten wir zunächst auch über  $x_1 + x_2$  verzweigen können. Dieser Term muss als Linearkombination ganzzahliger Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten ebenfalls ganzzahlig sein. Damit ergibt sich folgender Branch&Bound Baum:



Dieser Baum ergibt sich auch für allgemeines  $n$ .

## 2 Idee des Constraint Branching

Statt über Variablen wird über Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten verzweigt: Für  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  muss  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  ganzzahlig sein. Gilt für eine Relaxationslösung jedoch

$$\beta < \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i < \beta + 1 \quad \text{für ein } \beta \in \mathbb{Z},$$

so kann verzweigt werden in

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq \beta \quad \text{und} \quad \beta + 1 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Die Bedingungen über die verzweigt wird, müssen dem Linearen Programm als Nebenbedingungen (Cuts) hinzugefügt werden. Dies steht im Unterschied zum konventionellen Variable Branching, bei dem lediglich die Variablenschranken intern geändert werden müssen.

Leider gibt es kein Rezept, wie man gute Linearkombinationen findet, über die man verzweigen kann. Variable Branching ist Technik, Constraint Branching Kunst!

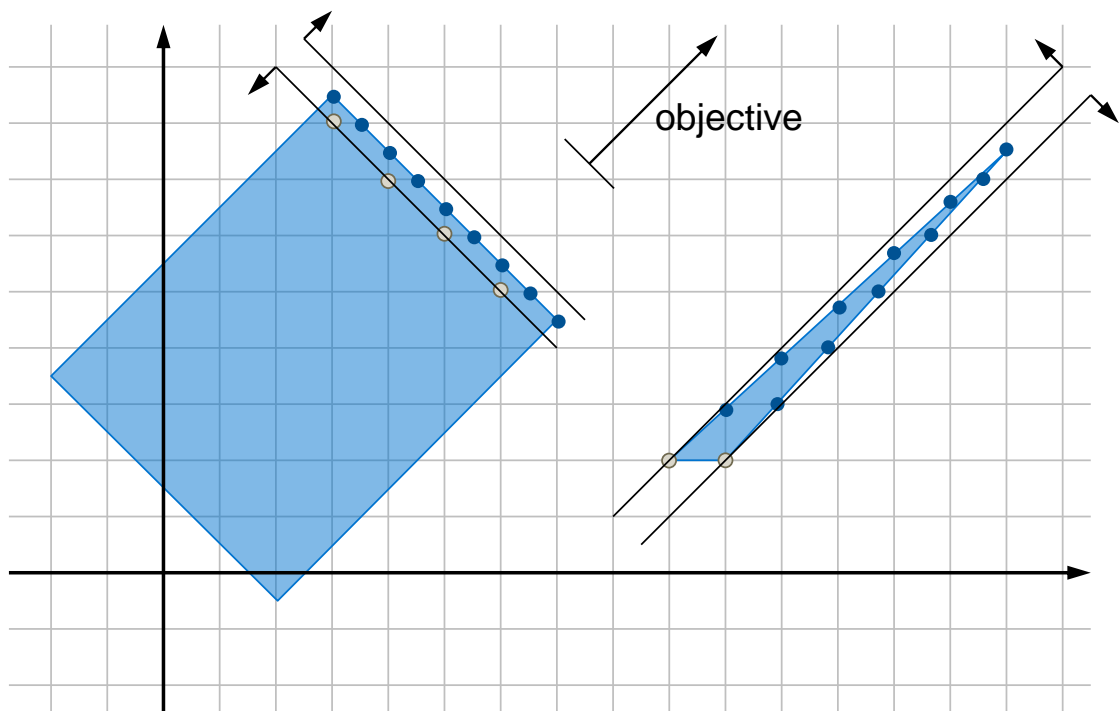


Abbildung 1: Illustration der Funktionsweise von Constraint Branching