Dipl.-Math.Oec Melanie Bestle | Dr. Michael Ritter

Subtour Elimination Constraints

1 Problembeschreibungen

Problem: Traveling Salesman
Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Distanzfunktion $d : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Aufgabe: Finde eine Tour, die alle Knoten des Graphen G genau einmal besucht und deren Länge bezüglich d möglichst klein ist, oder stelle fest, dass keine solche Tour existiert. Der Begriff „Tour" wird hier synonym mit „Hamilton-Kreis" verwendet.

2 Das TSP-Polytop

Definition
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP sei $\mathcal{T}(G)$ die Menge aller Touren in G. Für jede Tour $\tau \in \mathcal{T}(G)$ bezeichnen wir mit $x^{(\tau)} \in \{0, 1\}^{|E|}$ den Inzidenzvektor der Kanten, die in der Tour τ verwendet werden. Dann heißt das Polytop

$$P_{TSP}(G) := \operatorname{conv}\left\{x^{(\tau)} : \tau \in \mathcal{T}(G)\right\}$$

das *TSP-Polytop* zum Graphen G. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir auch einfach P_{TSP}. Für eine Kante $e \in E$ bezeichnet $x_e \in \{0, 1\}$ die zur Kante e gehörige Komponente von $x^{(\tau)}$.

Für eine Knotenteilmenge S bezeichnen wir mit $E(S)$ alle Kanten aus E, deren beide Enden in S liegen, und mit $\delta(S)$ alle Kanten aus E, bei denen genau ein Ende in S liegt:

$$E(S) := \{e \in E : |e \cap S| = 2\}$$
$$\delta(S) := \{e \in E : |e \cap S| = 1\}$$

3 Ungleichung

Die *Subtour Elimination*-Bedingung für eine Knotenteilmenge $S \subset V$ mit $\emptyset \neq S \neq V$ lautet:

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \qquad \text{(SEC)}$$

4 Gültigkeit der Ungleichung

Satz
Für eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP und beliebiges $S \subset V$ mit $\emptyset \neq S \neq V$ ist die Subtour Elimination-Bedingung zu S eine gültige Ungleichung für das TSP-Polytop $P_{TSP}(G)$.

Beweis. Sei eine Instanz $(G = (V, E), d)$ von TSP gegeben und sei $S \subset V$ mit $\emptyset \neq S \neq V$. Sei weiter $x^{(\tau)} \in \{0, 1\}^{|E|}$ eine Ecke von P_{TSP} und sei $\tau \in \mathcal{T}$ die zugehörige Tour. Angenommen, es gäbe eine Menge $S \subset V$ mit $\emptyset \neq S \neq V$, so dass

$$\sum_{e \in E(S)} x_e > |S| - 1,$$

dann enthält die Menge S mindestens $|S|$ Kanten der Tour τ. Man kann leicht zeigen (Wie?), dass der Subgraph $(S, E(S))$ dann einen Kreis enthält, was wegen $S \neq V$ aber ein Widerspruch ist. Damit gilt die Behauptung auch für das komplette Polytop P_{TSP}. (Warum genügt es dafür, die Aussage für die Ecken zu zeigen?)

5 Separation

Die Subtour-Elimination Constraints sind in der klassischen ILP-Formulierung des TSP bereits enthalten. Da ihre Anzahl aber exponentiell in den Eingangsdaten ist, werden sie in der Praxis herausgenommen und erst nach und nach wieder hinzugefügt, wenn sie durch die Lösung der Relaxation verletzt werden. Dazu benötigt man ein Separationsverfahren, also eine Möglichkeit, zu einer Lösung des relaxierten Problems eine verletzte Subtour Elimination Constraint zu finden.

Um so ein Verfahren herzuleiten, formen wir die Subtour Elimination Constraints erst ein wenig um. Überlegen Sie sich (auch anschaulich!), dass die Ungleichungen äquivalent auch wie folgt dargestellt werden können:

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \tag{SEC'}$$

Ist die Relaxationslösung x^* ganzzahlig, so ist das Separationsproblem leicht zu lösen (Wie?). Andernfalls separiert man eine verletzte Ungleichung mit Hilfe eines Netzwerk-Algorithmus: Für jedes $t \in V$ löst man das Minimum Cut-Problem auf dem Netzwerk $N = (G^*, u^*, s, t)$. Dabei ist

$$G^* := (V, E^*) \text{ mit } E^* := \{e \in E : x_e^* > 0\},$$

der sogenannte *Support Graph*,

$$u^* : E^* \to \mathbb{R}_{\geq 0}, e \mapsto x_e^*,$$

und $s \in V$ beliebig, aber für alle $t \in V$ gleich. Ist die Kapazität des minimalen Cuts C_t echt kleiner als 2, so ist (SEC') für $S = C_t$ verletzt. Gibt es für kein $t \in V$ einen solchen Cut, so erfüllt x^* alle Subtour Elimination Constraints. (Überlegen Sie sich, warum das richtig ist!)