Subtour Elimination Constraints

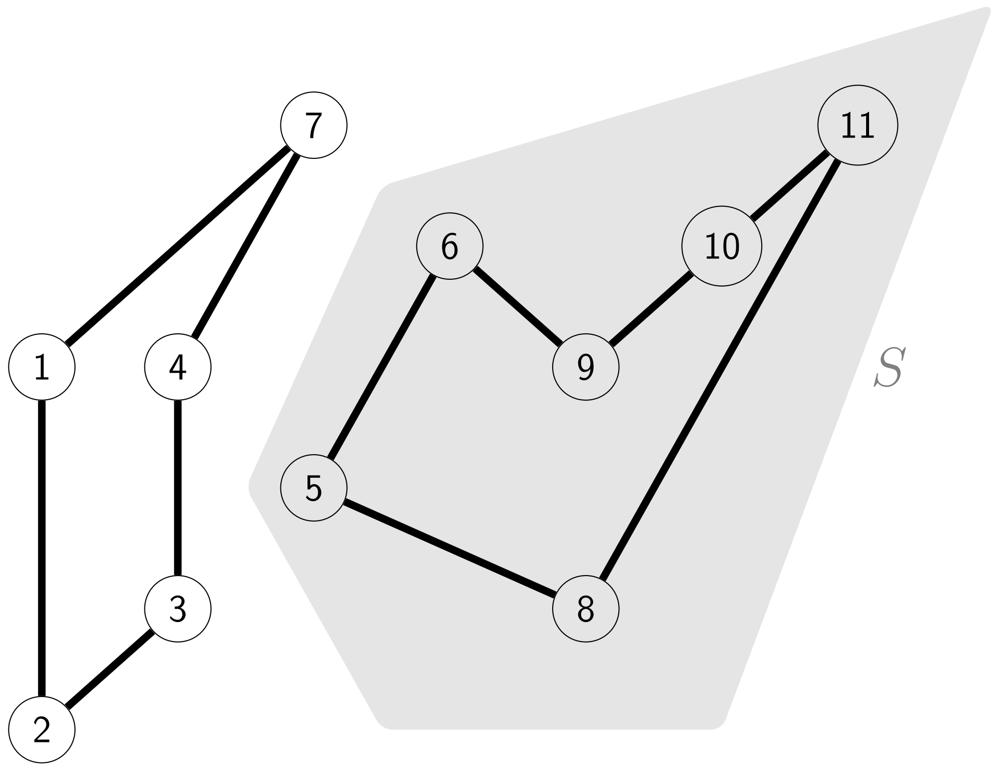
Problem: Traveling Salesman
Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Distanzfunktion $d : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Aufgabe: Finde eine Tour, die alle Knoten des Graphen G genau einmal besucht und deren Länge bezüglich d möglichst klein ist, oder stelle fest, dass keine solche Tour existiert.

Ungleichung

- Eine TSP-Tour darf keine „Untertouren“ enthalten
- Idee: Keine Knotenteilmenge außer V selbst darf einen Kreis enthalten
- Für alle $S \subseteq V$ mit $S \neq \emptyset$ und $S \neq V$ gilt

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1$$



Kamm-Ungleichungen

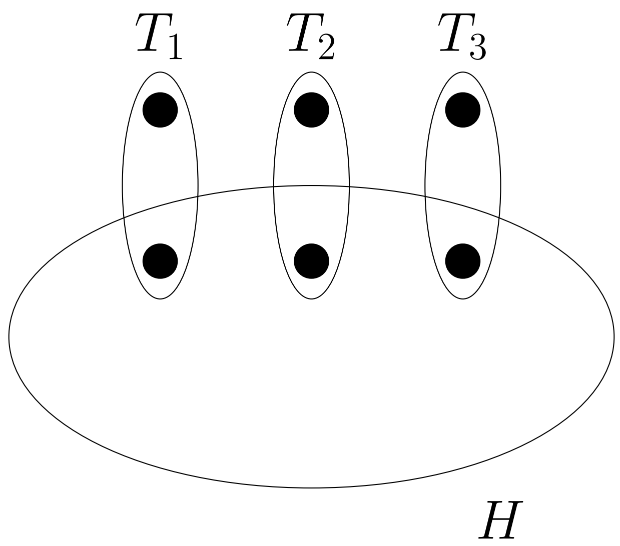
Problem: Traveling Salesman
Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Distanzfunktion $d : E \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Aufgabe: Finde eine Tour, die alle Knoten des Graphen G genau einmal besucht und deren Länge bezüglich d möglichst klein ist, oder stelle fest, dass keine solche Tour existiert.

Ungleichung

- Aufteilung der Knoten in geeignete, sich teilweise überlappende Teilmengen
- Idee: Tour muss diese Teilmengen „betreten“ und „verlassen“
- Für geeignete Teilmengen $T_1, \ldots, T_s, H \subseteq V$ gilt

$$\sum_{e \in \delta(H)} x_e + \sum_{i=1}^{s} \sum_{e \in \delta(T_i)} x_e \geq 3s + 1$$



2-Matching Inequalities

Problem: Traveling Salesman
Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Distanzfunktion $d : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Aufgabe: Finde eine Tour, die alle Knoten des Graphen G genau einmal besucht und deren Länge bezüglich d möglichst klein ist, oder stelle fest, dass keine solche Tour existiert.

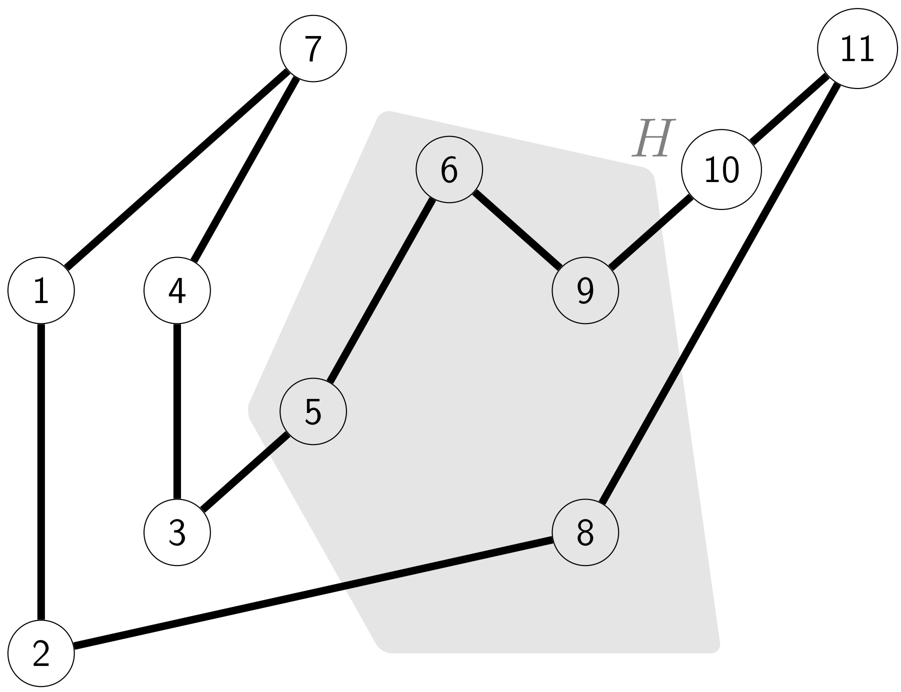
Problem: 2-Matching
Input: Ein Graph $G = (V, E)$.

Aufgabe: Finde ein 2-Matching in G, das möglichst viele Kanten enthält. Ein 2-Matching ist eine Kantenmenge $M \subseteq E$ mit der Eigenschaft, dass jeder Knoten mit höchstens 2 Kanten aus M inzident ist.

Ungleichung

- Jede TSP-Tour ist ein 2-Matching
- Idee: Jede gültige Ungleichung für 2-Matchings ist auch gültig für TSP
- Für alle $H \subseteq V$ und alle $F \subseteq \delta(H)$ gilt

$$\sum_{e \in E(H)} x_e + \sum_{e \in F} x_e \leq |H| + \left\lfloor \frac{|F|}{2} \right\rfloor$$



Capacity Inequalities für Vehicle Routing

Das *Capacitated Vehicle Routing Problem* ist eine Verallgemeinerung des Traveling Salesman Problems. Es modelliert die Belieferung mehrerer Kunden von einem gemeinsamen Depot aus.

Problem: Capacitated Vehicle Routing

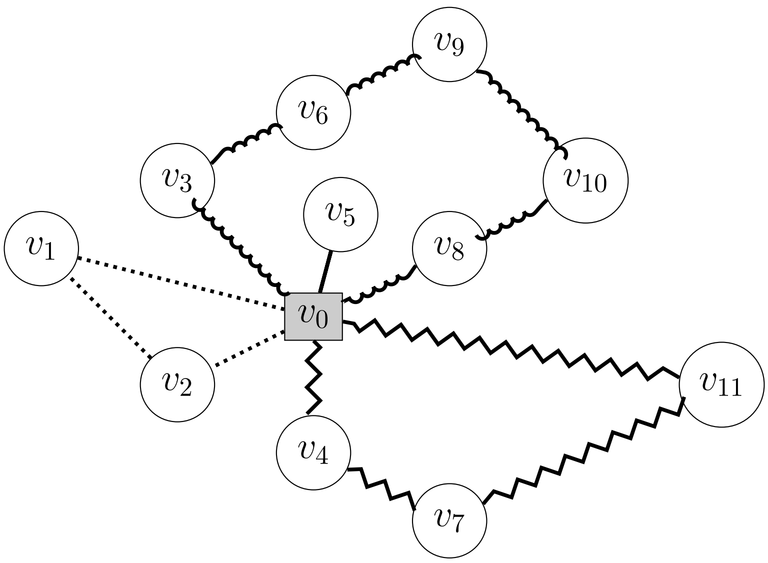
Input: Ein Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ (v_0 Depot), eine Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$, eine Nachfragefunktion $d : \{v_1, \ldots, v_n\} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$, eine Fahrzeugkapazität $C \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und eine maximale Fahrzeugzahl $K \in \mathbb{N}$.

Aufgabe: Finde Routen $R_1, \ldots, R_K$ (maximal K Stück) der Kapazität C, so dass jeder Knoten aus $V \setminus \{v_0\}$ von genau einer Route durchlaufen wird und die Gesamtlänge aller Routen $\sum_{i=1}^{K} \sum_{e \in E(R_i)} c(e)$ möglichst klein ist, oder stelle fest, dass keine solche Routen existieren. Eine Route R_i der Kapazität C ist ein Kreis in G, der v_0 enthält und für den gilt, dass die besuchten Knoten zusammen eine Nachfrage von höchstens C haben, d. h., $\sum_{v \in V(R_i)} d(v) \leq C$.

Ungleichung

- Für jede Teilmenge der Kunden muss die Nachfrage befriedigt werden
- Die Anzahl dazu benötigter Routen liefert eine Art „Subtour-Bedingung“
- Für alle $S \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$, $S \neq \emptyset$, gilt

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \left\lceil \frac{\sum_{v \in S} d(v)}{C} \right\rceil$$



Vehicle Routing mit vier Touren