Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Math. M. Ritter, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung I, SS 2008

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1 *ca. 4 Punkte*

Um gegen die letzte Preiserhöhung der Mensa zu protestieren, beschließen die Mitarbeiter der hiesigen Chemie-Fakultät, ihren eigenen breiartigen Nahrungsersatz herzustellen und den Studenten als Konkurrenzprodukt anzubieten.

Zum Mischen des Nahrungsersatzes stehen den Chemikern einige Grundbreiarten zur Verfügung. Logischerweise, so wird geschlossen, ergeben sich die Eigenschaften des resultierenden Breis aus denen seiner prozentual gewichteten Bestandteile. Zur Auswahl stehen:

Breisorte	Qualität	Kosten pro Mahlzeit
„grüner Kaktus“	4	1.5
„Wüstenrose“	9	3
„Sonnenaufgang“	3	1
„Atomei“	1	0.1

Gemessen auf der von den Chemikern benutzten Skala (von 1 bis 10) besitzen die Gerichte der Mensa eine Qualität von 5. Sie wissen, dass die Herstellung einer Mensa-Mahlzeit 2 Euro kostet. Die Chemiker wollen ihren Nahrungsersatz möglichst billig produzieren, dabei aber eine mindestens so hohe Qualität wie die Mensa erreichen.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem.

b) Erraten Sie eine optimale Mischung des Nahrungsersatzes. Erklären Sie informell, warum Ihre erratene Mischung optimal ist.

Aufgabe 1.2 *ca. 6 Punkte*

Für die Produktion der Produkte P_1 und P_2 benötigt ein Unternehmen eine Maschine, die in jedem Monat 150 Stunden zur Verfügung steht. Eine Einheit von P_1 kann in einer Stunde auf der Maschine gefertigt werden, für eine Einheit von P_2 werden hingegen 3 Stunden benötigt. Die Produktionskosten liegen bei 4 Euro für P_1 und 44 Euro für P_2. Auf dem Absatzmarkt lassen sich dafür Stückpreise von 8 Euro bzw. 49 Euro erzielen, wobei von P_1 maximal 100 und von P_2 maximal 40 Stück abgesetzt werden können. P_1 und P_2 können nur in ganzen Einheiten hergestellt werden.

Bitte wenden!

a) Welche Kombinationen von P_1 und P_2 lassen sich produzieren? Stellen Sie alle zulässigen Kombinationen durch ein Ungleichungssystem dar und skizzieren Sie den zulässigen Bereich.

b) Geben Sie Zielfunktionen für eine Gewinn- bzw. Umsatzmaximierung an. Bestimmen Sie (mit Begründung) die jeweiligen Optima.

Aufgabe 1.3 *ca. 6 Punkte*
Gegeben sei folgendes System von Ungleichungen:

$$x + y \leq 4 \tag{1}$$
$$x + \frac{1}{2}y \leq \frac{5}{2} \tag{2}$$
$$\frac{1}{2}x + y \leq 3 \tag{3}$$
$$x \geq 0 \tag{4}$$
$$y \geq \frac{1}{2} \tag{5}$$

Sei P die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die alle Ungleichungen erfüllen.

a) Stellen Sie P grafisch dar. Gibt es überhaupt zulässige Punkte? Enthält das Ungleichungssystem redundante Ungleichungen, d.h. kann man Ungleichungen weglassen, ohne den zulässigen Bereich des Systems zu verändern?

b) Wir suchen nun einen Punkt $(x^*, y^*) \in P$, für den die Zielfunktion $x + y$ ein Maximum annimmt. Bestimmen Sie graphisch eine mögliche Optimallösung.

c) Bestimmen Sie analytisch die exakten Koordinaten des in b) gefundenen Punktes. Zeigen Sie die Optimalität Ihrer Lösung, indem Sie eine geeignete obere Schranke für die Zielfunktion aus dem Ungleichungssystem herleiten.

Abgabe des Blattes (möglichst in Dreiergruppen) bis Mittwoch, 23. April, 2008, 14:00 Uhr, im Briefkasten im UG oder am Stammgelände (s. Homepage). Bitte benutzen Sie das Deckblatt von der Homepage
`http://www-m9.ma.tum.de/twiki/bin/view/SS2008/Optimierung1.`