Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Math. M. Ritter, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung I, SS 2008

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 *ca. 4 Punkte*
Beweisen Sie den Satz von Radon:

Sei M eine Menge von $d+2$ Punkten im $\mathbb{R}^d$. Dann kann M in zwei Teile M_1 und M_2 partitioniert werden (d. h. $M_1 \cup M_2 = M$ und $M_1 \cap M_2 = \emptyset$), so dass $\operatorname{conv}(M_1) \cap \operatorname{conv}(M_2) \neq \emptyset$.

Aufgabe 5.2 *ca. 6 Punkte*
Beweisen Sie folgende endliche Version des Satzes von Helly:

Sei $n > d$ und $M = \{M_1, ..., M_n\}$ eine endliche Menge von konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Falls der Schnitt von jeweils $d + 1$ dieser Mengen nichtleer ist, dann ist

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i \neq \emptyset.$$

Hinweis: Ein möglicher Beweis benutzt den Satz von Radon.

Aufgabe 5.3 *ca. 6 Punkte*
Sei $U := \operatorname{lin}\left\{(1, -1, 0)^T, (1, 1, -2)^T\right\}$, $a = (1, 1, 0)^T$ und $W = [-1, 1]^3$ der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie das Polyeder $P := W \cap (a + U)$, das durch den affinen Unterraum $a + U$ aus dem Einheitswürfel ausgeschnitten wird.

a) Besitzt P innere Punkte? Geben Sie ggf. einen inneren Punkt von P an.

b) Welche Dimension besitzt P?

c) Bestimmen Sie eine $\mathcal{V}$-Darstellung von P und geben Sie den relativen Rand von P an.

d) Geben Sie eine explizite Darstellung für das relative Innere von P mit Hilfe eines Ungleichungssystems an.

e) Skizzieren Sie W und P und kennzeichnen Sie den relativen Rand sowie das relative Innere von P.

Abgabe des Blattes (möglichst in Dreiergruppen) bis Mittwoch, 21. Mai, 2008, 14:00 Uhr, im Briefkasten im UG oder am Stammgelände (s. Homepage). Bitte benutzen Sie das Deckblatt von der Homepage
`http://www-m9.ma.tum.de/twiki/bin/view/SS2008/Optimierung1.`