Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Math. M. Ritter, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung I, SS 2008

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 *ca. 5 Punkte*
Sei P das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b\}$ mit

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b^T = (0,\ 0,\ 0,\ 6,\ 4).$$

Für $x_0 \in P$ bezeichnen $N_P(x_0) = \left\{c \in \mathbb{R}^3 : \max_{x \in P} c^T x = c^T x_0\right\}$ den Kegel der äußeren Normalen und $S_P(x_0) = \bigcap_{c \in N_P(x_0)} H^{\leq}_{(c,0)}$ den Innenkegel im Punkt x_0, wie in der Vorlesung definiert.

a) Bestimmen Sie $S_P(x_0)$ und $N_P(x_0)$ für $x_0 \in \{(0,6,0)^T, (0,2,2)^T\}$.

b) Bestimmen Sie ein $x_0 \in P$, so dass $\dim(\operatorname{aff}(N_P(x_0))) = 2$.

c) Stellen Sie Ihre Ergebnisse aus a) und b) grafisch dar.

Aufgabe 6.2 *ca. 2 Punkte*
Zeigen Sie: Der Schnitt eines konvexen Polyeders P mit einer Stützhyperebene H an P ist ein konvexes Polyeder.

Aufgabe 6.3 *ca. 3 Punkte*
Sei P ein volldimensionales Polytop im $\mathbb{R}^n$ und $q \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, so dass P und q strikt trennbar sind. Sei zudem $p \in \operatorname{bd}(P)$ beliebig, und $\overline{pq}$ die Verbindungsstrecke von p und q.

Zeigen Sie: Ist $\operatorname{int}(P) \cap \overline{pq} \neq \emptyset$, so gibt es keine P und q trennende Hyperebene, die p enthält.

Aufgabe 6.4 *ca. 5 Punkte*
Sei $A = (a_1, \ldots, a_k)$ eine Matrix mit den Spalten $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^m$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe eines Trennungssatzes: Es gibt genau dann eine nichtnegative Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, wenn für alle $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y^T A \geq 0$ auch $y^T b \geq 0$ gilt.

b) Folgern Sie aus der vorigen Teilaufgabe: Das Ungleichungssystem $Ax \leq b$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn $y^T b \geq 0$ für alle $y \in \left\{z \in \mathbb{R}^m : z \geq 0 \ \wedge \ z^T A = 0\right\}$ gilt.

Abgabe des Blattes (möglichst in Dreiergruppen) bis Mittwoch, 28. Mai, 2008, 14:00 Uhr, im Briefkasten im UG oder am Stammgelände (s. Homepage). Bitte benutzen Sie das Deckblatt von der Homepage `http://www-m9.ma.tum.de/twiki/bin/view/SS2008/Optimierung1`.