Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Math. M. Ritter, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt

Optimierung I, SS 2008

Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1
Betrachten Sie das Ungleichungssystem aus Beispiel 3.2.8, 3.2.13 und 3.2.17 der Vorlesung (vgl. Kurzskript auf der Homepage).

$$\begin{aligned} \max \quad & \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 & \\ \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 &\leq 3 & (1) \\ -2\xi_1 + \xi_2 &\leq 0 & (2) \\ \xi_1 &\leq 1 & (3) \\ \xi_2 &\leq 1 & (4) \\ \xi_3 &\leq 1 & (5) \\ -\xi_1 &\leq 0 & (6) \\ -\xi_2 &\leq 0 & (7) \\ -\xi_3 &\leq 0 & (8) \end{aligned}$$

a) Untersuchen Sie alle möglichen Basen von $v_1 = (0,0,0)^T$ auf lexikographische Zulässigkeit.

b) Bestimmen Sie eine lexikographisch zulässige Basis für die Ecke $v_3 = (1,0,0)^T$. Führen Sie, ausgehend von der gewählten Basis, einen Simplexschritt unter Verwendung der lexikographischen Pivotregel aus.

Lösung zu Aufgabe 13.1

a) Die Ungleichungen $(2),(6),(7)$ und (8) sind in v_1 aktiv. Also müssen wir die Kombinationen $(2),(6),(7)$, $(2),(6),(8)$, $(2),(7),(8)$ und $(6),(7),(8)$ betrachten, und jeweils das eine y_i untersuchen mit $i \notin B$.

- $(2),(6),(7)$: keine Basis, da a_2, a_6, a_7 linear abhängig sind.
- $B_1 = \{(2),(6),(8)\}$:

$$A_{B_1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y_{7,1} = 0, y_{7,2} = a_7^T(-A_{B_1}^{-1} u_{2_B}) = (0,-1,0)^T(0,-1,0) = 1 \Rightarrow$ lexikografisch positiv $\Rightarrow$ lexikografisch zulässig

- $B_2 = \{(2),(7),(8)\}$:

$$A_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y_{6,1} = 0, y_{6,2} = a_6^T(-A_{B_2}^{-1} u_{2_B}) = (-1,0,0)^T(\frac{1}{2},0,0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ nicht lexikografisch positiv $\Rightarrow$ nicht lexikografisch zulässig

- $B_3 = \{(6),(7),(8)\}$:

$$A_{B_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{B_3}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y_{2,1} = 0, y_{2,2} = 1 \Rightarrow$ lexikografisch positiv $\Rightarrow$ lexikografisch zulässig

b) Es gilt $B = \{3,7,8\}$ und

$$A_B = A_{B(v_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A_{B(v_3)}^{-1} = A_B^{-1}, \quad b_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als Verbesserungskante des zugehörigen Kegels $S(B)$ hatten wir $v_3 + [0,\infty[u_2$ gewählt. Es gilt $R = \{i \in N : a_i^T u_2 > 0\} = \{1,2,4\}$. Die zugehörigen Vektoren z_i $(i \in R)$ sind nach Bemerkung 4.3.15

$$\begin{aligned} z_1 &= (1, \tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}, 0, 0, 0, 1, \tfrac{1}{2})^T, \\ z_2 &= (2, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 0)^T, \\ z_4 &= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)^T. \end{aligned}$$

$\big(a_i^T u_2\big) z_i$ enthält nach dieser Bemerkung ja als 0te Komponente $\beta_i - a_i^T v_3$, die $i$te Komponente ist 1, die Komponenten 3, 7 und 8 sind (in dieser Reihenfolge) die Einträge von $-a_i^T A_B^{-1}$ und alle übrigen Komponenten sind 0.

Der Vektor z_4 ist der lexikographisch kleinste; wir nehmen also den Index 4 in die Basis auf. Das hatten wir 'vorausschauend' vorher auch bereits getan; mit der lexikographischen Regel ist $i_{\text{rein}} = 4$ aber zwingend. Der Rest verläuft analog zur Vorlesung.

Aufgabe 13.2

Ein Schweinemastbetrieb muss den Nährstoff-Bedarf der Schweine an vier verschiedenen Nährstoffen decken. Dafür stehen drei unterschiedliche Futtermittel (mit verschiedenen Einkaufspreisen) zur Verfügung, die in geeigneter Mischung verfüttert werden sollen.

a) Formulieren Sie das Problem, die entstehenden Ausgaben für die Futtermittel zu minimieren, als lineare Optimierungsaufgabe.

b) Stellen Sie nun das duale Problem auf und geben Sie für dieses eine geeignete ökonomische Interpretation an.

Lösung zu Aufgabe 13.2

a) Wir bezeichnen mit α_{ij} die Menge des Nährstoffes N_i, die im Futtermittel F_j enthalten ist, $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 3$. Ferner sei γ_j der Preis und ξ_j die Menge des Futtermittels F_j, sowie β_i der Bedarf am Nährstoff i.
Wir erhalten das folgende LP:

$$\min \sum_{j=1}^{3} \gamma_j \xi_j \text{ u.d.N. } \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} \xi_j \geq \beta_i,\ i = 1, \ldots, 4,\ \xi_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 3.$$

Das Duale lautet:

$$\max \sum_{i=1}^{4} \beta_i \eta_i \text{ u.d.N. } \sum_{i=1}^{4} \alpha_{ij} \eta_i \leq \gamma_j,\ j = 1, \ldots, 3,\ \eta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 4.$$

b) Ökonomische Interpretation: Alternativ zur Verfütterung von Futtermitteln, können die Nährstoffe auch separat erworben werden. Nährstoff N_i wird von einem Händler, der seinen Umsatz maximieren will, angeboten. Bezeichnen wir den Preis einer Einheit von N_i mit η_i, den der Händler nichtnegativ wählen wird. Der Umsatz des Händlers entspricht dann exakt der Zielfunktion und die Preise sind nur dann sinnvoll gewählt, wenn es nicht billiger ist, ein Futtermittel anstatt der einzelnen Nährstoffe zu verfüttern.