Extremale Kombinatorik

Prof. Dr. Anusch Taraz | Dipl.-Math. Andreas Würfl

Aufgabe 4.5 *Die 'meisten' k-Tupel haben die 'richtige' Anzahl gemeinsamer Nachbarn*
Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ und für alle reelen Zahlen $d, \xi > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt, falls $G = (A \cup B, E)$ ein ε-reguläres Paar mit $|A| = |B| = n \geq n_0$ und mit Dichte $d(A, B) = d$ ist, dann erfüllen alle bis auf höchstens ξn^k der möglichen k-Tupel $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq \binom{A}{k}$ verschiedener Knoten aus A, dass

$$(1 - \xi)d^k n \leq \left| \bigcap_{i=1}^{k} N(u_i) \right| \leq (1 + \xi)d^k n\,.$$

Lösung zu Aufgabe 4.5
Seien $k \in \mathbb{N}$, d, $\gamma > 0$ gegeben. Sei $G = (A \cup B, E)$ ein ε-reguläres Paar mit $|A| = |B| = n \geq n_0$ und mit Dichte $d(A, B) = d$.

Aus Proposition 2.2 wissen wir: *Sei $U \subseteq B$ mit $|U| \geq \varepsilon n$, dann gilt für mindestens $(1 - \varepsilon)n$ Knoten $v \in A$:*

$$(d - \varepsilon)|U| \leq |N(v) \cap U| \leq (d + \varepsilon)|U|$$

(analog für $v \in B$ und $U \subset A$).

Sei also $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq \binom{A}{k}$ gegeben. Wir betrachten für $j = 1, \ldots, k$ die Mengen $\bigcap_{i=1}^{j} N(u_i)$. Für alle bis auf höchstens $(1 - j\varepsilon)n^j$ viele Tupel gilt hier

$$(d - \varepsilon)^j n \leq \left| \bigcap_{i=1}^{j} N(u_i) \right| \leq (d + \varepsilon)^j n\,. \tag{1}$$

was z.B. durch Induktion gezeigt werden kann (dabei nimmt beim Schritt von j nach $j + 1$ die Menge $\bigcap_{i=1}^{j} N(u_j)$ die Rolle von U in Prop. 2.2 ein).

Damit fehlt nur noch die richtige Wahl von ε. Wir wollen

- $(d - \varepsilon)^{k-1} \geq \varepsilon$ (Prop 2.2 muss auch im letzten Schritt anwendbar sein)
- $k\varepsilon \leq \xi$ (der Anteil der Tupel, für die (1) nicht gilt)
- $(d - \varepsilon)^k \geq (1 - \xi)d^k$ bzw. $(d + \varepsilon)^k \leq (1 + \xi)d^k$ (obere bzw. untere Schranke)

Nun ist $(d - \varepsilon)^k = (1 - \frac{\varepsilon}{d})^k d^k \geq (1 - k\frac{\varepsilon}{d})d^k$. Wir setzen also $\varepsilon = \min\{(\frac{d}{2})^k, \frac{d\xi}{k}, \frac{d}{1000}\}$.

Wo kam jetzt das n_0 vor?

Das steckt implizit in der Regularität: Wir wollen ein ε-reguläres Paar und wählen ε erst im Beweis. Paare brauchen aber im Allgemeinen eine bestimmte Größe, um überhaupt ε-regulär sein zu können ($|A| \geq 1/\varepsilon$ ist hier nur eine triviale untere Schranke).