Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Extremale Kombinatorik

Prof. Dr. Anusch Taraz | Dipl.-Math. Andreas Würfl

Aufgabe 5.1 *Induzierte Matchings*
Verwenden Sie das Regularitätslemma, um folgenden Satz zu zeigen:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert n_0, so dass für jeden Graphen $G = (V, E)$ auf $n \geq n_0$ Knoten gilt: Falls E die Vereinigung von n induzierten Matchings ist, gilt $e(G) \leq \varepsilon n^2$.

Hinweis:
Was sagt die Existenz eines induzierten Matchings über die Dichte eines regulären Paares aus?

Aufgabe 5.2 *Gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke*
Im Gitter $[N] \times [N]$ bilden die Punkte (x, y), $(x, y + d)$, $(x + d, y)$ ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck. Ajtai und Szemerédi haben folgenden Satz gezeigt:

Zu $\delta > 0$ existiert N_0, so dass für jedes $N \geq N_0$ gilt: Wenn $R \subseteq [N] \times [N]$ mit $|R| \geq \delta N^2$ ist, existieren $(x, y), (x, y + d), (x + d, y) \in R$ mit $d \neq 0$.

Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 5.1. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:
Definieren Sie einen bipartiten Graph, dessen Kanten durch R gegeben sind. Suchen Sie hier (nicht) induzierte Matchings.

Aufgabe 5.3 *Rusza Szemerédi*
Zeigen Sie mit Hilfe des Regularitätslemmas folgenden Satz:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $RS(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für jeden Graph $G = (V, E)$ auf $n \geq RS(\varepsilon)$ Knoten gilt: Wenn sich die Kantenmenge von G in mindestens εn^2 kantendisjunkte Dreiecke partitionieren lässt, dann enthält G ein sogenanntes (6,3)-Tripel. Dabei ist ein (6,3)-Tripel der Graph auf sechs Knoten, dessen Kanten die Vereinigung von drei kantendisjunkten Dreiecken sind.

Hinweis:
Finden Sie ein Dreieck im reduzierten Graphen und benutzen Sie das Einbettungslemma 2.7.

Aufgabe 5.4 *Der Satz von Roth*
Der Satz von Roth besagt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass für $n \geq n_0$ gilt: jede Teilmenge $A \subset [n]$ mit $|A| \geq \varepsilon n$ enthält eine 3-AP.

Beweisen Sie den Satz von Roth mit Hilfe von Aufgabe 5.3, indem Sie ein (6,3)-Tripel in folgendem Graphen $G = (V, E)$ finden: $V = X \cup Y \cup Z$ mit $X = \{x_1, \ldots, x_{3n}\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_{3n}\}$, $Z = \{z_1, \ldots, z_{3n}\}$. Dabei induziere $\{x_i, y_j, z_k\}$ ein Dreieck in G, wenn $k - j = j - i \in A$ gilt.

Wir empfehlen, die Hausaufgaben zu bearbeiten und bieten eine Korrektur an. Bitte geben Sie Ihre Lösungen jeweils am Anfang der nächsten Vorlesung (in diesem Fall am 1. Juli) ab. Natürlich ist es auch möglich, in Gruppen abzugeben.