Extremale Kombinatorik

Prof. Dr. Anusch Taraz | Dipl.-Math. Andreas Würfl

Aufgabe 6.1 *Perfekte Matchings in $\mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$*
Geben Sie einen Greedy-Algorithmus an, der mit Wahrscheinlichkeit

$$\prod_{i=0}^{n/2-1} \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2i+1}\right)$$

in einem zufälligen Graphen $\mathcal{G}(n, \frac{1}{2})$ ein perfektes Matching findet (wenn n gerade ist). Zeigen Sie ferner, dass diese Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{3}$ ist.

Aufgabe 6.2 *Bunte Hypergraphen*
Ein Hypergraph ist ein Tupel $G = (V, E)$, wobei für $e \in E$ gilt: $e \subseteq V$. Ein Hypergraph heißt k-uniform, wenn für jedes $e \in E$ gilt: $|e| = k$. Der Grad eines Knotens $v \in V$ ist definiert als die Anzahl der Kanten, in denen v enthalten ist. Ein (Hyper)graph heißt k-regulär, wenn jeder Knoten den Grad k hat.

Zeigen Sie nun folgende Aussage:
Sei $H = (V, E)$ ein k-regulärer k-uniformer Hypergraph auf n Knoten. Wenn $n < 2^{k-1}$, dann existiert eine Zweifärbung der Knoten von H, so dass keine Kante einfarbig ist.

Aufgabe 6.3 *Großes g und großes χ*
Die Taillenweite (*girth*) eines Graphen $g(G)$ ist die Knotenanzahl eines kleinsten Kreises in G. Erdős bewies 1959:
Zu jedem k gibt es einen Graphen G mit $g(G) > k$ und $\chi(G) > k$.

Das heißt, Graphen können hohe chromatische Zahl haben, obwohl sie lokal wie Bäume aussehen. Beweisen Sie diesen Satz, indem Sie für $0 < \varepsilon < \frac{1}{k}$ und $p = n^{\varepsilon-1}$ den Graphen $\mathcal{G}(n, p)$ betrachten. Zeigen Sie nun:

a) für die Anzahl X_k der Kreise der Länge k in $\mathcal{G}(n, p)$ gilt: $E(X_k) = \frac{(n)_k}{2k} p^k$

b) für die Anzahl X der Kreise mit Länge höchstens k in $\mathcal{G}(n, p)$ gilt: $\lim_{n\to\infty} P[X \geq \frac{n}{2}] = 0$.

c) für die Stabilitätszahl α gilt: $P[\alpha \geq \frac{n}{2k}] < \frac{1}{2}$.

Für Teil b) ist die Markovsche Ungleichung hilfreich. Wie folgt aus a), b) und c) der Satz von Erdős?

Bitte wenden!

Aufgabe 6.4 *Eine untere Schranke im Satz von van der Waerden*
Der Satz von van der Waerden besagt:

Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Zahl $W(k) \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq W(k)$ gilt: Jede Zweifärbung von $[n]$ enthält eine einfarbige k-AP.

Zeigen Sie durch ein probabilistisches Argument:

$$W(k) \geq 2^{\frac{k}{2}} .$$

Wir empfehlen, die Hausaufgaben zu bearbeiten und bieten eine Korrektur an. Bitte geben Sie Ihre Lösungen jeweils am Anfang der nächsten Vorlesung (in diesem Fall am 15. Juli) ab. Natürlich ist es auch möglich, in Gruppen abzugeben.