Extremale Kombinatorik

Prof. Dr. Anusch Taraz | Dipl.-Math. Andreas Würfl

Aufgabe 7.1 *WALK-2-SAT*
Um die erwartete Laufzeit von WALK-2-SAT abzuschätzen, wurde in der Vorlesung folgende Rekursion hergeleitet:

$$\begin{aligned} d_0 &= 0 \\ d_n &= d_{n-1} + 1 \\ d_i &= \tfrac{1}{2}(d_{i-1}+1) + \tfrac{1}{2}(d_{i+1}+1) && \text{für alle } i \in [n-1] \ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie (z.B. durch Induktion), dass für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ gilt:

$$d_i = 2in - i^2 \ .$$

Aufgabe 7.2 *WALK-3-SAT*
Ziel dieser Aufgabe ist folgende Laufzeitschranke für WALK-3-SAT:
Wenn WALK-3-SAT in $\Theta((\frac{4}{3})^n\sqrt{n})$ Läufen jeweils nach $3n$ Runden abbricht, ohne eine erfüllende Belegung gefunden zu haben, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Formel erfüllbar, ist kleiner als $e^{-\Theta((4/3)^n\sqrt{n})}$.

Sei $A = A_0$ eine zufällige Startbelegung der Variablen, A_i die Belegung nach i Schritten und sei B eine erfüllende Belegung der gegebenen 3-SAT-Formel. Dann definieren wir $f_i = d_{edit}(A_i, B)$ als die Anzahl der Variablen, deren Belegung nach Schritt i geändert werden muss, um die erfüllende Belegung B zu erhalten.

Sei $p_j := P[f_{3j} = 0 | f_0 = j]$ die Wahrscheinlichkeit, dass WALK-3-SAT nach höchstens $3j$ Schritten die Belegung B gefunden hat, wenn die Startbelegung A sich in genau j Variablenbelegungen von B unterscheidet. Um p_j von unten zu beschränken, betrachten wir Wege der Länge $2i + j$ von $f_0 = j$ zu $f_{2i+j} = 0$, die $i \leq j$ Schritte mit steigendem und $i + j$ Schritte mit fallendem f machen.

Zeigen Sie nun:

a) Es gibt genau $\binom{2i+j-1}{i} - \binom{2i+j-1}{i-1} = \binom{j+2i}{i}\frac{j}{j+2i}$ derartige Wege.

b) $p_j \geq \binom{3j}{j}\frac{2^j}{3^{3j+1}}$.

c) $Pr[\exists \ell \in [3n] : f_\ell = 0] \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n / \Theta(\sqrt{n})$.

d) Aus c) folgt die angegebene Fehlerwahrscheinlichkeit.

Aufgabe 7.3 *Schwellenwert für Subgraphen*
Zeigen Sie Satz 3.13 aus der Vorlesung für den Spezialfall $H = K_3$:

Für einen Graphen $H = (V, E)$ definieren wir $\rho(H) = |E|/|V|$. Wenn $\rho(H) = \max_{H' \subseteq H} \rho(H')$, dann ist

$$t(n) = n^{-\frac{|V|}{|E|}} = n^{-\frac{1}{\rho(H)}}$$

die Schwellenwertfunktion für die Eigenschaft "$H \subseteq G(n,p)$".

Aufgabe 7.4 *Spannende Bäume*
Sei $p = \frac{2}{n}$ und X_n die Anzahl der spannenden Bäume in $G(n,p)$. Beweisen Sie:

a) $E[X_n] \to \infty$ für $n \to \infty$, aber

b) $P[X_n \geq 1] \to 0$ für $n \to \infty$.

Tipp:

Ein Ergebnis von Cayley besagt, dass genau n^{n-2} Bäume als Subgraphen im K_n enthalten sind.

Das vorliegende letzte Aufgabenblatt wird in der Übung besprochen.