Ramsey Theorie

Anusch Taraz

20. Mai 2009

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Ramseytheorie

Im vorangegangenen Kapitel haben wir uns angestrengt, um Objekte mit einer besonders ausgeprägten Struktur zu konstruieren, oder wenigstens ihre Existenz nachzuweisen. Im Folgenden untersuchen wir ein Phänomen, das dem in gewisser Weise entgegen gesetzt zu sein scheint: wenn ein Objekt genügend groß ist, dann muss es wohl strukturierte Teilobjekte enthalten. Dieses Leitmotiv der Ramseytheorie lässt sich gut mit den Worten von Theodore Motzkin zusammenfassen: *complete disorder is impossible.*

1 Satz von Ramsey

Ein Beispiel für die eben genannte Philosophie ist das sogenannte *Schubfachprinzip*, das sofort einsichtig ist. In der endlichen Version besagt es: Seien N und M zwei endliche Mengen mit Kardinalität $n = |N|$ und $m = |M|$, und sei $f : N \to M$ eine beliebige Funktion. Dann existiert eine Menge $S \subset N$ mit $|S| \geq \lceil \frac{n}{m} \rceil$ und ein Element $c_0 \in M$, so dass die Funktion f alle Elemente von S auf c_0 abbildet.[1] Die unendliche Variante des Schubfachprinzip lässt sich noch eleganter formulieren: Wenn die Elemente einer unendlichen Menge mit einer endlichen Anzahl von Farben gefärbt werden, dann existert eine unendliche *einfarbige* Teilmenge – also eine Teilmenge, deren Elemente alle die gleiche Farbe erhalten.

Das Schubfachprinzip ist deswegen so einfach, weil hier die gleichen Objekte, nämlich die Elemente der Menge N, sowohl gefärbt wie auch zu Teilmengen zusammengefasst werden sollen. Die Situation wird ungleich interessanter, wenn wir zwar nachwievor nach Teilmengen von N suchen, aber nun $2-$, $3-$, oder r-Tupel färben.

---

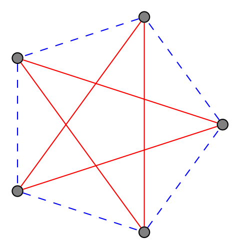
[1] Klar: wenn wir n Tauben in einem Taubeschlag mit m Löchern verteilen, dann müssen in einem Loch mindestens $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ hocken – irgendwo müssen sie ja hin. Aus diesem Grund heißt das Schubfachprinzip auf Englisch auch *pigeonhole principle.*

Eine kleine Anmerkung: Es hat sich eingebürgert, innerhalb der Ramseytheorie von *Färbungen* zu sprechen – damit ist aber nichts weiter als eine Partition der betreffenden Familie in eine (endliche oder unendliche) Anzahl von (Farb-)Klassen gemeint. In keinem Fall sind damit Färbungen gemeint, die per se bestimmte Eigenschaften haben müssen, wie beispielsweise die Graphenfärbungen in Abschnitt **??**, bei denen benachbarte Knoten unterschiedliche Farben brauchen.

Als nächstes färben wir nun Paare von Knoten und stellen uns diese als die Kantenmenge eines (vollständigen) Graphen vor.

Definition (Ramseyzahl)**.** Sei $k \in \mathbb{N}$. Die *Ramseyzahl* $R(k)$ bezeichnet die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass jede Färbung der Kanten des vollständigen Graphen K_n mit zwei Farben einen einfarbigen K_k erzwingt.

Um mit dieser Definition vertraut zu werden, betrachten wir zunächst einige einfache Beispiele. Es gilt, dass $5 < R(3)$, denn wie die folgende Abbildung zeigt, existiert eine 2-Kantenfärbung des K_5 ohne einen einfarbigen K_3.



Um uns andererseits davon zu überzeugen, dass $R(3) \leq 6$, müssen wir zeigen, dass jede 2-Kantenfärbung des K_6 einen einfarbigen K_3 erzwingt. Sei also eine beliebige rot-blau Färbung der Kanten des K_6 gegeben. Wir betrachten einen beliebigen Knoten x. Wegen des Schubfachprinzips muss x zu mindestens drei der fünf verbleibenden Knoten mittels Kanten der gleichen Farbe verbunden sein (denn $\lceil 5/2 \rceil = 3$), sagen wir (oBdA) dies seien die Knoten u, v, w und die Kanten haben alle drei die Farbe rot. Jetzt sind wir aber fertig, denn
– entweder ist mindestens eine der Kanten $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ oder $\{w, u\}$ auch rot, dann schließt sich mit Hilfe der roten Kanten zu x ein roter K_3,
– oder alle Kanten $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ oder $\{w, u\}$ sind blau, dann haben wir einen blauen K_3 gefunden.
Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $5 < R(3) \leq 6$, somit folgt $R(3) = 6$.

Nach dieser Aufwärmübung stellt sich die Frage, warum eine solche kleinste natürliche Zahl n wie in der obigen Definition überhaupt existieren muss. Könnte es nicht sein, dass beispielsweise für $k = 17$ für jedes noch so große $n \in \mathbb{N}$ eine 2-Kantenfärbung des K_n existiert, die keinen einfarbigen K_{17} enthält?

Der folgende Satz zeigt, dass das nicht sein kann, und gibt zugleich Schranken für $R(k)$ an.

Satz 1.1. *Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$2^{k/2} \leq R(k) \leq 2^{2k-2}.$$

Beweis. Die untere Schranke werden wir später in Abschnitt **??** mit Hilfe von probabilistischen Methoden beweisen.

Zum Beweis der oberen Schranke müssen wir zeigen, dass für $n \geq 2^{2k-2}$ jede rot-blau Färbung der Kanten des K_n einen einfarbigen K_k enthält. Sei also eine beliebige rot-blau Färbung gegeben.

Wir definieren wie folgt eine Folge von Knoten $v_0, \ldots, v_{2k-2}$ und Teilmengen $[n] \supset V_0 \supset \cdots \supset V_{2k-2}$ mit $v_i \in V_i$ für alle $i \in [0, 2k-2]$. Setze $V_0 := [n]$ und wähle $v_0 \in V_0$ beliebig. Angenommen, $v_0, \ldots, v_i$ und $V_0, \ldots, V_i$ seien bereits gewählt. Einige der Knoten in V_i sind durch rote Kanten mit v_i verbunden, die anderen durch blaue Kanten. Wir bezeichnen die größere dieser beiden Teilmengen von V_i mit V_{i+1} und wählen einen beliebigen Knoten $v_{i+1} \in V_{i+1}$. Also gilt, dass $|V_{i+1}| \geq \lceil (|V_i|-1)/2 \rceil = \lfloor |V_i|/2 \rfloor$, und wegen $n \geq 2^{2k-2}$ können wir diese Folge bis $i = 2k-2$ fortsetzen. Wenn v_i durch rote Kanten mit den Knoten in V_{i+1} verbunden ist, nennen wir ihn einen *roten Knoten*, andernfalls einen *blauen Knoten*. Mindestens $\lceil (2k-1)/2 \rceil = k$ der Knoten in der Folge $v_0, \ldots, v_{2k-2}$ müssen die gleiche Farbe haben. Da alle Kanten, die zwischen ihnen verlaufen, ebenfalls die gleiche Farbe haben, haben wir einen einfarbigen K_k gefunden.

Bild

□

Diese obere Schranke garantiert uns insbesondere, dass die Ramseyzahl $R(k)$ wohldefiniert ist. Tatsächlich kennt man die exakten Werte nur von sehr wenigen Ramseyzahlen – man weiß beispielsweise, dass $R(4) = 18$, aber schon für $k = 5$ sind lediglich die Schranken $43 \leq R(5) \leq 49$ bekannt. Man beachte, dass hier auch ein Probieren mit dem Computer nicht viel hilft, weil man ja $2^{\binom{43}{2}}$ verschiedene 2-Kantenfärbungen des K_{43} durchgehen müsste.

Für allgemeine k ist die derzeit beste bekannte obere Schranke von der Größenordnung $\frac{2^{2k}}{\sqrt{k}}$ (und damit nur wenig geringer als die Schranke aus dem obigen Satz).

Wir betrachten nun zwei Varianten des obigen Satzes. In der ersten werden nicht nur *Paare* mit *zwei* Farben, sondern allgemeiner *ℓ-Tupel* mit r verschiedenen Farben gefärbt. Die zweite beschreibt eine unendliche Version.

Satz 1.2 (Satz von Ramsey)**.** *Für beliebige natürliche Zahlen k, ℓ und r existiert eine kleinste natürliche Zahl $R(k,\ell,r)$, so dass für jede Menge N mit $|N| \geq R(k,\ell,r)$ und jede Färbung*

$$f : \binom{N}{\ell} \to [r]$$

eine Menge $K \in \binom{N}{k}$ und eine Farbe $r_0 \in [r]$ mit der Eigenschaft

$$f(L) = r_0 \qquad \forall L \in \binom{K}{\ell}$$

existiert.

Um auf das alte Beispiel zurück zu kommen: der Fall $\ell = r = 2$ beschreibt das Szenario aus Satz 1.1: hier gilt also $R(3,2,2) = R(3) = 6$ und $R(k,2,2) \leq 2^{2k-2}$. Es ist wichtig, zu verstehen, inwiefern der Satz von Ramsey mehr als das Schubfachprinzip aussagt: er liefert für jede Färbung der ℓ-elementigen Teilmengen aus der Menge N nicht nur eine Menge von ℓ-elementigen Teilmengen der gleichen Farbe, sondern eine Teilmenge $K \subset N$, deren ℓ-elementige Teilmengen alle die gleiche Farbe haben.

Bild

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über ℓ. Für den Induktionsanfang $\ell = 1$ folgt die Aussage aus dem zu Beginn des Kapitels erwähnten Schubfachprinzip, hier gilt also $R(k,1,r) = (k-1)r + 1$.

Nach Induktionsannahme gilt die Aussage für k, $\ell - 1$ und r und wir setzen

$$t := R(k, \ell - 1, r). \tag{1.1}$$

Ferner wählen wir $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass die Folge $u_{\ell-2} \geq u_{\ell-1} \geq \cdots \geq u_t$, die durch $u_{\ell-2} := n - (\ell - 2)$ und die Rekursion

$$u_{i+1} := (u_i - 1)r^{-\binom{i+1}{\ell-1}} \tag{1.2}$$

definiert ist, noch $u_t \geq 1$ erfüllt. Wir behaupten, dass für das so gewählte n gilt: $R(k,\ell,r) \leq n$. Mit anderen Worten: Wenn N eine Menge der Kardinalität mindestens n und $f : \binom{N}{\ell} \to [r]$ eine beliebige Färbung ist, dann können wir eine Menge $K \in \binom{N}{k}$ finden, so dass alle $L \in \binom{K}{\ell}$ von f auf die gleiche Farbe abgebildet werden. Mit dieser Aussage hätten wir dann die Existenz von $R(k, \ell, r)$ nachgewiesen (und mehr müssen wir ja auch gar nicht zeigen).

Unser Zwischenziel ist es, eine Folge $S_{\ell-2}, \ldots, S_t$ von Teilmengen $S_i \subseteq N$ und eine Folge $a_1, \ldots, a_t$ von Elementen $a_i \in N$ mit

$$a_{i+1} \in S_i \text{ und } S_{i+1} \subseteq S_i \setminus \{a_{i+1}\}$$

und der folgenden Eigenschaft zu konstruieren: für beliebige Indizes $i_1 < \cdots < i_{\ell-1} < s, s'$ aus $[t]$ gilt, dass

$$f(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\ell-1}}, a_s\}) \quad = \quad f(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\ell-1}}, a_{s'}\}). \tag{1.3}$$

Mit anderen Worten: Die durch f an die ℓ-Menge vergebene Farbe ist unabhängig von der letzten Zahl.

Bild

Um das zu erreichen, wählen wir die ersten Elemente $a_1, \ldots, a_{\ell-2}$ beliebig aus der Menge N und setzen $S_{\ell-2} := N \setminus \{a_1, \ldots, a_{\ell-2}\}$. Angenommen die Folgen $a_1, \ldots, a_i$ und $S_i \subseteq \cdots \subseteq S_{\ell-2}$ seien bis $i \in [\ell-2, t]$ konstruiert. Wir wählen dann zunächst a_{i+1} aus S_i beliebig. Um S_{i+1} zu definieren, nummerieren wir die Teilmengen durch

$$\binom{\{a_1, \ldots, a_{i+1}\}}{\ell-1} =: \{T_1, \ldots, T_{\binom{i+1}{\ell-1}}\}.$$

Jetzt weisen wir jedem $x \in S_i \setminus \{a_{i+1}\}$ einen Vektor $x_f \in [r]^{\binom{i+1}{\ell-1}}$ zu, der aus den Farben aller ℓ-Mengen, die x enthalten, besteht:

$$x_f := \Big(f(T_1 \cup \{x\}), \ldots, f(T_{\binom{i+1}{\ell-1}} \cup \{x\}) \Big).$$

Bild

Wir nennen zwei Zahlen x, y aus $S_i \setminus \{a_{i+1}\}$ äquivalent, wenn $x_f = y_f$. Dadurch definieren wir eine Äquivalenzrelation und bezeichnen mit S_{i+1} eine größte der so entstehenden Äquivalenzklassen. Für zwei $x, y \in S_{i+1}$ gilt nun, dass

$$x_f = y_f \text{ und damit } f(T \cup \{x\}) = f(T \cup \{y\}) \text{ für alle } T \in \binom{\{a_1, \ldots, a_{i+1}\}}{\ell - 1}.$$

Wie groß ist S_{i+1}? Da es höchstens $r^{\binom{i+1}{\ell-1}}$ verschiedene Vektoren gibt, kann es auch nur höchstens soviele Äquivalenzklassen geben, also muss S_{i+1} als eine größte von ihnen mindestens $(|S_i|-1)/r^{\binom{i+1}{\ell-1}}$ Elemente enthalten. Nach Definition von n und der Rekursion in (1.2) folgt, dass wir die Folgen bis $i = t$ fortsetzen können und am Ende immer noch $a_t \in N$ und $S_t \neq \emptyset$ haben.

Damit haben wir nun unser in (1.3) formuliertes Zwischenziel erreicht: Zu gegebenem $i_1 < \cdots < i_{\ell-1}$ und $i_{\ell-1} + 1 \leq s, s'$ wählen wir den Index i so, dass $i + 1 = i_{\ell-1}$ und damit auch $i + 1 \leq s - 1, s' - 1$. Somit folgt

$$\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\ell-1}}\} \subseteq \{a_1, \ldots, a_{i+1}\} \text{ sowie } a_s \in S_{s-1} \subseteq S_{i+1} \text{ und } a_{s'} \in S_{s'-1} \subseteq S_{i+1}.$$

Nach Konstruktion ist dann wegen $(a_s)_f = (a_{s'})_f$

$$f(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\ell-1}}, a_s\}) = f(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\ell-1}}, a_{s'}\}),$$

wie in (1.3) gefordert.

Jetzt definieren wir eine Färbung $\hat{f} : \binom{\{a_1,\ldots,a_t\}}{\ell-1} \to [r]$ durch

$$\hat{f}(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\ell-1}}\}) := f(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\ell-1}}, a_s\})$$

für ein beliebiges s mit $i_{\ell-1} + 1 \leq s \leq t$. Nach (1.3) spielt die Wahl von a_s dabei keine Rolle. (Falls $i_{\ell-1} = t$ und deswegen kein Platz mehr für s sein sollte, wählen wir eine beliebige Farbe aus $[r]$.) Nach Wahl von t in (1.1) existiert nun eine Menge $\hat{K} \in \binom{\{a_1,\ldots,a_t\}}{k}$ und eine Farbe $\hat{r}_0 \in [r]$, so dass

$$\hat{f}(\hat{L}) = \hat{r}_0 \qquad \forall \hat{L} \in \binom{\hat{K}}{\ell - 1}.$$

Wenn wir nun $K := \hat{K}$ und $r := \hat{r}_0$ setzen, sind wir schon am Ziel unserer Träume: Für jede beliebige Menge $L = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\ell-1}}, a_{i_\ell}\} \in \binom{K}{\ell}$ mit $i_1 < \cdots < i_{\ell-1} < i_\ell$ gilt jetzt

$$f(L) = \hat{f}(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\ell-1}}\}) = \hat{r}_0 = r_0,$$

was zu beweisen war. □

Hier noch, wie versprochen, die unendliche Variante des Satzes von Ramsey, wenn auch ohne Beweis.

Satz 1.3. *Für beliebige natürliche Zahlen r und ℓ, eine unendliche Menge N und eine beliebige Färbung $f : \binom{N}{\ell} \to [r]$ existiert eine unendliche Menge $K \subseteq N$ und eine Farbe $r_0 \in [r]$, so dass*

$$f(L) = r_0 \qquad \forall L \in \binom{K}{\ell}.$$

2 Konvexe Polygone

In diesem Abschnitt wollen wir eine weitere Situation studieren, in der sich das Leitmotiv *Complete disorder is imposssible* schön manifestiert. Hier betrachten wir – statt Färbungen – eine beliebige Menge von Punkten in der Ebene. Wir sagen, dass sich k Punkte in *allgemeiner Lage* befinden, wenn keine drei von ihnen gemeinsam auf einer Gerade liegen. Sie bilden ein *konvexes Polygon*, wenn sie die Eckpunkte eines k-Ecks sind und alle ihre Verbindungsstrecken ganz im Inneren des k-Ecks verlaufen. Wir werden nun zeigen, dass sich für jede vorgegebene natürliche Zahl k in einer genügend großen Punktmenge immer eine solche Struktur finden lässt.

Bild

Satz 2.1. *Für jede natürliche Zahl k existiert eine kleinste natürliche Zahl $ES(k)$, so dass jede Menge von mindestens $ES(k)$ Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene k Punkte enthält, die ein konvexes Polygon bilden.*

Wir geben zwei Beweise für diesen Satz. Der erste Beweis beruht auf dem Satz von Ramsey und zeigt auf diese Weise, wie die unterschiedlichen Teile der Ramseytheorie miteinander verknüpft sind.

Erster Beweis. Es sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wenden den Satz von Ramsey an (Satz 1.2 mit $\ell := 3$ und $r := 2$) an, erhalten die Zahl $n := R(k, 3, 2)$ und behaupten, dass $n \geq ES(k)$.

Um dies zu zeigen sei eine beliebige Menge N von mindestens n Punkten in allgemeiner Lage gegeben. Wir führen zunächst die folgende Notation ein. Wenn $x, y, z \in N$, dann bezeichnen wir mit $|xyz|$ die Anzahl der Punkte aus N, die im Inneren des Dreiecks mit den Eckpunkten x, y und z liegen. Nun definieren wir wie folgt eine Färbung f der Punkte-Tripel mit zwei Farben. Wenn $|xyz|$ ungerade ist, setzen wir $f(\{x, y, z\}) := 1$, andernfalls $f(\{x, y, z\}) := 2$.

Die Wahl von n garantiert uns eine Menge K von k Punkten, so dass alle Tripel in K durch f die gleiche Farbe erhalten. Wir würden nun gerne zeigen, dass K ein konvexes Polygon bildet und nehmen dazu das Gegenteil an. Dann muss die konvexe Hülle der k Punkte mindestens einen Punkt im Inneren enthalten, und nach einer Triangulisierung finden wir vier Punkte x, y, z, w in K, so dass w im Inneren des Dreiecks x, y, z liegt.

Bild

Da sich die Punkte von N in allgemeiner Lage befanden, gilt jetzt:

$$|xyz| = |xyw| + |yzw| + |xzw| + 1.$$

Alle vier in der obigen Gleichung auftretenden Tripel haben von f die gleiche Farbe bekommen, und entsprechend sind die vier Größen $|xyz|,\ldots,|xzw|$ alle gerade oder alle ungerade. Jeder der beiden Fälle führt, wegen der $+1$, zum Widerspruch. $\square$

Durch die Verwendung des Satzes von Ramsey erhält man zwar einen eleganten Beweis, verliert aber ein wenig die geometrische Sicht auf die Dinge. Dieses Manko wird in dem folgenden zweiten Beweis behoben, und er liefert auch eine obere Schranke für die Zahl der Punkte.

Zweiter Beweis. Wir sagen, dass eine Menge $\{a^1, \ldots, a^k\}$ von Punkten in allgemeiner Lage lexikographisch geordnet ist, wenn $(a^i)_x < (a^{i+1})_x$ oder wenn $(a^i)_x = (a^{i+1})_x$ und $(a^i)_y < (a^{i+1})_y$, für alle $i \in [k-1]$.

Eine solche Punktemenge heißt *konkav*, wenn die Folge der Steigungen

$$\frac{(a^{i+1})_y - (a^i)_y}{a^{i+1})_x - a^i_x}$$

für $i \in [k-1]$ monoton fällt, und *konvex*, wenn sie monoton wächst. Offensichtlich bilden sowohl eine konkave wie auch eine konvexe Menge die Eckenmenge eines konvexen Polygons.

Bild

Wir definieren $f(s,t)$ als die kleinste Zahl n, so dass jede Menge von n Punkten in allgemeiner Lage eine konkave Punkmenge der Größe s oder eine konvexe Punktmenge der Größe t enthält. Damit gilt, dass $ES(k) \leq f(k,k)$, und daher ist Satz 2.1 bewiesen, sobald wir eine obere Schranke für die Funktion $f(s,t)$ angeben können.

Diese Schranke werden wir rekursiv herleiten. Zunächst ist klar, dass $f(3,k) = f(k,3) = k$ für jedes $k \geq 3$ gilt. Darüberhinaus behaupten wir, dass

$$f(s,t) \quad \leq \quad f(s-1,t) + f(s,t-1) - 1 \tag{2.4}$$

für $s,t \geq 4$ gilt.

Um dies zu zeigen, sei N eine Menge von $f(s-1,t)+f(s,t-1)-1$ Punkten, die lexikographisch geordnet seien. Wir müssen beweisen, dass N eine konkave Punkmenge der Größe s oder eine konvexe Punktmenge der Größe t enthält.

Wir bezeichnen mit N' die ersten $f(s-1,t)$ Punkte von N (bezüglich der lexikographischen Ordnung) und mit $b^1, \ldots, b^\ell$ und $\ell = f(s,t-1)-1$ die Punkte in $N \setminus N'$, wiederum lexikographisch geordnet.

Aufgrund ihrer Größe muss N' eine konkave Teilmenge der Größe $s-1$ oder eine konvexe Teilmenge der Größe t enthalten; in letzterem Fall müssten wir nichts mehr beweisen. Sei also C_0 eine konkave Teilmenge der Größe $s-1$ und $c^0 \in N'$ ihr letzter Punkt.

Wir setzen $N' := (N' \setminus \{c^0\}) \cup \{b^1\}$. Mit dem gleichen Argument wie vorher können wir auch bei der modifizierten Menge N' davon ausgehen, dass sie eine konkave Teilmenge C_1 der Größe $s-1$ enthält. Ihren letzten Punkt nennen wir c^1 und bemerken, dass er verschieden von c^0 sein muss (denn den hatten wir zuvor aus N' entfernt).

Diese Prozedur wiederholen wir für $i = 2, \ldots, \ell$: ersetze c^{i-1} in N' durch b^i, erhalte in der neuen Menge N' eine konkave Menge C_i der Größe $s-1$ und nenne ihren letzten Punkt c^i.

Bild

Wir betrachten die auf diese Weise konstruierte Punkte $c^0, \ldots, c^\ell$ und merken an, dass sie nicht notwendigerweise lexikographisch geordnet sind und auch nicht aus der Menge $\{b^1, \ldots, b^\ell\}$ kommen müssen. Wichtig für uns ist nur, dass jeder der Punkte letzter Punkt einer konkaven Menge der Größe $s-1$ ist.

Die Menge $\{c^0, \ldots, c^\ell\}$ muss wegen $\ell+1 = f(s,t-1)$ eine konkave Punktmenge der Größe s oder eine konvexe Punktmenge der Größe $t-1$ enthalten. Da wir im ersten Fall wieder fertig wären, können wir uns auf den zweiten beschränken und bezeichnen die konvexe Menge der Größe $t-1$ mit $\overline{C}$ und ihren lexikographisch ersten und zweiten Punkt mit c^i und c^j.

Wir erinnern uns daran, dass c^i der letzte Punkt der konkaven Punktmenge C_i ist. Den vorletzten Punkt von C_i benennen wir mit d. Nun können wir entweder die konkave Menge C_i oder die konvexe Menge $\overline{C}$ um einen Punkt erweitern: Wenn die Steigung der Strecke dc^i größer als die Steigung der Strecke c^ic^j ist, dann bildet $C_i \cup \{c^j\}$ eine konkave Teilmenge von N der Größe s. Andernfalls ist die Steigung der Strecke dc^i kleiner als die Steigung der Strecke c^ic^j, und dann bildet $\{d\} \cup \overline{C}$ eine konvexe Teilmenge von N der Größe t. In beiden Fällen haben wir unser die Rekursionsungleichung (2.4) gezeigt und somit die Existenz der Zahl $ES(k)$ und Satz 2.1 ein zweites Mal bewiesen. □

Es ist nicht schwer, mit Hilfe der Rekursion (2.4) zu zeigen, dass $ES(k) \leq 2^{2k}$ ist (siehe Aufgabe **??**). Andererseits gibt es direkte Konstruktionen, die beweisen, dass $ES(k) \geq 2^{k-2}+1$, und es wird vermutet, dass diese untere Schranke bestmöglich ist.

3 Arithmetische Progressionen

Nach den einfarbigen Cliquen und den konvexen Polygonen in den beiden vorangegangenen Abschnitten wollen wir uns nun Objekten mit einer auffälligen arithmetischen Substruktur zuwenden. Hierbei werden wir die natürlichen Zahlen mit einer beliebigen, aber festen Anzahl von Farben färben, und dann nach „einfarbigen Lösungen“ von bestimmten Gleichungen suchen.

Satz 3.1 (Satz von Schur)**.** *Für jede natürliche Zahl r existiert eine natürliche Zahl n, so dass für jede Färbung $f : [n] \to [r]$ drei (nicht notwendigerweise verschiedene) Zahlen $x, y, z \in [n]$ existieren, für die*

$$x = y + z \qquad \textit{und} \qquad f(x) = f(y) = f(z) \qquad \textit{gelten.}$$

Beweis. Es sei $\ell \in \mathbb{N}$ vorgegeben, wir setzen $k := 3$ und $\ell := 2$, wenden wieder den Satz von Ramsey (Satz 1.2) an und erhalten eine Zahl $n := R(k, \ell, r)$. Sei nun eine beliebige Färbung $f : [n] \to [r]$ gegeben. Wir benutzen sie, um unsererseits eine Färbung $\hat{f} : \binom{[n]}{2} \to [r]$ zu definieren, in dem wir $\hat{f}(\{i,j\}) := f(|j-i|)$ setzen.

Die Wahl von n garantiert uns nun eine Farbe $r_0 \in [r]$ und eine Menge $K = \{a, b, c\} \subset [n]$, deren zweielementige Teilmengen unter $\hat{f}$ alle die gleiche Farbe r_0 bekommen. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $a < b < c$ gilt und definieren die natürlichen Zahlen

$$y := b - a, \qquad z := c - b, \qquad x := c - a,$$

die alle in $[n]$ liegen. Somit gelten $y + z = (b - a) + (c - b) = c - a = x$ und

$$\begin{aligned} f(y) &= f(b-a) = \hat{f}(\{a,b\}) = r_0, \\ f(z) &= f(c-b) = \hat{f}(\{b,c\}) = r_0, \\ f(x) &= f(c-a) = \hat{f}(\{a,c\}) = r_0, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Ein wichtiges Thema der Ramseytheorie ist die Frage, ob eine Aussage wie die obige auch für andere Gleichungen als $x = y + z$ gilt. Wir beschränken uns an dieser Stelle auf zwei Beispiele dazu.

Bemerkung.
a) Man kann zeigen, dass in der Tat eine analoge Aussage für die Gleichung $2x = y + z$ gilt, und zwar auch dann, wenn die triviale Lösung $x = y = z$ verboten wird. Wir werden dies in Kürze aus einem stärkeren Resultat folgern (siehe Satz 3.2).
b) Für die Gleichung $3x = y + z$ gilt hingegen keine analoge Aussage. Um das einzusehen kann man für jedes noch so große n beispielsweise die folgende Färbung $f : [n] \to [4]$ betrachten. Um $f(m)$ zu definieren, ermitteln wir zunächst die eindeutigen Parameter $i, p \in \mathbb{N}_0$ und $q \in [4]$ in der Darstellung $m = 5^i(5p + q)$ und setzen dann $f(m) = q$, Wir überlassen es den Lesenden zu zeigen, dass die Gleichung $3x = y + z$ unter dieser Färbung keine einfarbige Lösung hat.

Wir wollen nun größere einfarbige Objekte mit einer besonderen arithmetischen Struktur suchen, nämlich arithmetische Progressionen. Wir sagen, dass eine Färbung $f : [n] \to [r]$ eine *einfarbige arithmetische Progression der Länge* $k \in \mathbb{N}$ *enthält*, wenn es eine Farbe r_0 und eine Folge der Form $(a, a + d, a + 2d, ..., a + (k-1) \cdot d) \subset [n]$ mit $a, d \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f(a + id) = r_0$ für alle $i \in [0, k - 1]$.

Satz 3.2 (Satz von van der Waerden, 1927)**.** *Für beliebige natürliche Zahlen k und r existiert eine kleinste natürliche Zahl $W(k, r)$, so dass für jedes $n \geq W(k, r)$ jede Färbung $f : [n] \to [r]$ eine einfarbige arithmetische Progression der Länge k enthält.*

Wir folgen dem Beweis in [GRS] und führen dazu den Begriff der Äquivalenz zweier Vektoren ein: Seien $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $x' = (x_1, \ldots, x'_m) \in [0, k]^m$ zwei Vektoren. Wir nennen sie k-äquivalent und schreiben $x \sim_k x'$, wenn für alle $s \in [m]$ gilt:

$$(x_s \neq x'_s) \Rightarrow (\forall t \geq s \; x_t \neq k \neq x'_t),$$

das heißt, wenn x und x' mindestens bis einschließlich zum letzten Auftreten der Zahl k übereinstimmen. Insbesondere bedeutet das im Fall $m = 1$: für zwei beliebige Zahlen $0 \leq x, x' \leq k - 1$ gilt $x \sim_k x'$.

$\boxed{\text{Bild}}$

Mit Hilfe dieses Begriffs formulieren wir nun den folgenden

Satz 3.3. *Für alle $k, m, r \in \mathbb{N}$ gibt es eine kleinste Zahl $n = W(k, m, r)$, so daß für jede Abbildung $f : [n] \to [r]$ gilt: es gibt a, $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{N}$, so daß*

$$\forall x \in [0, k]^m : \; 1 \leq a + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i \leq n, \tag{3.5}$$

$$\forall x, x' \in [0, k]^m \textit{ mit } x \sim_k x' : \; f(a + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i) = f(a + \sum_{i=1}^{m} x_i' d_i). \tag{3.6}$$

Offensichtlich folgt Satz 3.2 aus dem Spezialfall $m = 1$ des letzten Satzes.

Beweis von Satz 3.3. Wir werden die folgenden beiden Aussagen zeigen:

$$\begin{aligned} W(k, m+1, r) &\leq W(k, m, r) \cdot W(k, 1, r^{W(k,m,r)}) \qquad (3.7)\\ W(k+1, 1, r) &\leq 2W(k, r, r). \qquad (3.8) \end{aligned}$$

Um (3.7) zu zeigen, setzen wir $M := W(k, m, r)$ und $N := W(k, 1, r^M)$ und betrachten eine beliebige Abbildung $f : [MN] \to [r]$. Sei f_N definiert durch

$$f_N : [N] \to [r]^M, \; f_N(x) := \Big(f\big((x-1)M + 1\big), \ldots, f\big((x-1)M + M\big)\Big).$$

Dadurch gilt: $f_N(x) = f_N(x') \Leftrightarrow \forall j \in [M] : \; f((x-1)M + j) = f((x'-1)M + j)$. Nach Wahl von N gibt es a' und d', so daß

$$\forall x \in [0, k] : \; 1 \leq a' + xd' \leq N, \tag{3.9}$$

$$\forall x, x' \in [0, k] \text{ mit } x \sim_k x' : \; f_N(a' + xd') = f_N(a' + x'd').$$

was wir zurück in die Funktion f übersetzen als

$$\forall i, i' \in [0, k-1] : \; f((a' + id' - 1)M + j) = f((a' + i'd' - 1)M + j) \quad \forall j \in [M]. \tag{3.10}$$

Sei f_M definiert durch

$$f_M : [M] \to [r], \; f_M(j) := f((a' - 1)M + j).$$

Nach Wahl von M existieren $a, d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{N}$ so dass

$$\forall x \in [0, k]^m : \; 1 \leq a + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i \leq M,$$

$$\forall x, x' \in [0,k]^m \text{ mit } x \sim_k x' : \; f_M(a + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i) = f_M(a + \sum_{i=1}^{m} x'_i d_i).$$

Wir setzen $\hat{a} := a + (a' - 1)M$, betrachten die letzen beiden Aussagen wieder in die Sprache der Funktion f und erhalten

$$\forall x \in [0,k]^m : \; (a' - 1)M + 1 \le \hat{a} + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i \le (a' - 1)M + M = a'M, \tag{3.11}$$

$$\forall x, x' \in [0,k]^m \text{ mit } x \sim_k x' : \; f(\hat{a} + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i) = f(\hat{a} + \sum_{i=1}^{m} x'_i d_i). \tag{3.12}$$

Nun setzen wir $d_{m+1} := d'M$ und behaupten, dass die so gewählten $\hat{a}, d_1, \ldots, d_{m+1}$ das Geforderte leisten. Um (3.5) zu überprüfen stellen wir fest, dass für $x \in [0,k]^{m+1}$

$$1 \le (a'-1)M+1 \overset{(3.11)}{\le} \hat{a}+\sum_{i=1}^{m+1} x_i d_i \overset{(3.11)}{\le} a'M+x_{m+1}d_{m+1} \le (a'+kd')M \overset{(3.9)}{\le} NM.$$

Um (3.6) zu überprüfen betrachten wir $x, x' \in [0,k]^{m+1}$ mit $x \sim_k x'$. Falls $x_{m+1} = k$ oder $x'_{m+1} = k$, dann müsste $x = x'$ sein und wir müssen nichts mehr zeigen. Also können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $x_{m+1}, x'_{m+1} < k$.

Weiterhin wissen wir bereits nach (3.12), dass

$$f(\hat{a} + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i) = f(\hat{a} + \sum_{i=1}^{m} x'_i d_i),$$

und es genügt daher zu zeigen, dass

$$f(\hat{a} + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i) = f(\hat{a} + \sum_{i=1}^{m+1} x_i d_i) \tag{3.13}$$

und

$$f(\hat{a} + \sum_{i=1}^{m} x'_i d_i) = f(\hat{a} + \sum_{i=1}^{m+1} x'_i d_i). \tag{3.14}$$

Nach (3.11) existiert ein $j \in [M]$, so dass

$$\hat{a} + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i = (a' - 1)M + j,$$

und damit ist auch

$$\hat{a} + \sum_{i=1}^{m+1} x_i d_i = (a' - 1)M + j + x_{m+1} d'M = (a' + x_{m+1} d' - 1)M + j.$$

Nun können wir aber (3.10) mit $i := 0$ und $i' := x_{m+1} \in [0, k-1]$ anwenden und erhalten

$$f((a'-1)M + j) = f((a' + x_{m+1}d' - 1)M + j),$$

was genau (3.13) entspricht. In analoger Manier zeigt man dann (3.14) für x' anstelle von x, und damit ist (3.7) bewiesen.

Um (3.8) zu zeigen, setzen wir $N := W(k, r, r)$. Sei eine beliebige Abbildung $f : [2N] \to [r]$ gegeben. Nach Wahl von N gibt es a, $d_1, \ldots, d_r$, so dass erstens $a + k\sum_{i=1}^{r} d_i \leq N$ und zweitens $f(a + \sum_{i=1}^{r} x_i d_i)$ konstant auf jeder k-Äquivalenzklasse ist. Wir betrachten die folgenden Vektoren $x^\mu \in [0, k]^r$ für $0 \leq \mu \leq r$:

$$x^0 := (0, \ldots, 0),\ x^1 := (k, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ x^r := (k, \ldots, k).$$

Nach dem Schubfachprinzip gibt es nun zwei Vektoren x^μ, x^ν, $\mu < \nu$, so dass $f(a + \sum_{i=1}^{r}(x^\mu)_i d_i) = f(a + \sum_{i=1}^{r}(x^\nu)_i d_i)$ gilt. Da aber jeder Vektor x mit $x = \overbrace{(\underbrace{k, \ldots, k}_{\mu}, j, \ldots, j}^{\nu}, 0, \ldots, 0)$ mit $j \in [0, k]$ entweder k-äquivalent zu x^μ (wenn $j < k$) oder k-äquivalent zu x^ν (wenn $j = k$) ist, folgt, dass es eine Farbe $r_0 \in [r]$ gibt, so dass für alle $j \in [0, k]$ gilt

$$f(a + \sum_{i=0}^{\mu} kd_i + \sum_{i=\mu+1}^{\nu} jd_i) = r_0.$$

Mit $a' := a + \sum_{i=1}^{\mu} kd_i$ und $d' := \sum_{i=\mu+1}^{\nu} d_i$ sind dann aber die beiden Zahlen für $W(k+1, 1, r)$ gefunden, denn schließlich ist jetzt $f(a' + jd') = r_0$ für alle $j \in [0, k]$ und $a' + (k+1)d' \leq 2N$. Damit ist nun auch (3.8) bewiesen.

Mit Hilfe von (3.7) und (3.8) kommen wir nun induktiv zu dem Schluß, daß die Behauptung für alle $k, m, r \in \mathbb{N}$ gilt: Die Behauptung ist trivial für den Fall $k = m = 1$, r beliebig. Wenn die Behauptung für k, m und alle r gilt, dann nach (3.7) auch für für $k, m+1$ und alle r. Gilt die Behauptung für k und alle m, r, dann nach (3.8) auch für $k+1$, $m = 1$ und alle r. Und dann wiederum nach (3.7) für $k+1$, $m+1$ und alle r. □

Mit Hilfe des Spezialfalls $k = 3$ im Satz von van der Waerden können wir nun auch die Bemerkung a) nach dem Beweis von Satz 3.1 beweisen: eine einfarbige arithmetische Progression $a, a+d, a+2d$ liefert via $x := a+d$, $y := a$ und $z := a+2d$ sofort die Lösung der Gleichung $2x = y + z$.

Die besten derzeit bekannten Schranken für $W(k, r)$ lauten

$$\frac{cr^k}{rk} \leq W(k, r) \leq 2^{2^{r^{2^{2^{k+9}}}}}.$$

Alle Sätze, die wir bislang in den Abschnitten 1 und 3 kennengelernt haben, sind *Partitionsresultate*. Sie besagen, dass wir, egal wie die Kanten des vollständigen Graphen oder die natürlichen Zahlen in Farbklassen partitioniert sind, in einer der Klassen eine wohlgeordnete Struktur (Clique oder arithmetische Progression) auftauchen muss. *Wir wissen aber nicht, in welcher.*

Es erscheint durchaus naheliegend, die gewünschte Struktur immer in derjenigen Farbklasse zu vermuten, die den höchsten Anteil an den zu färbenden Objekten besitzt. Im Falle der einfarbigen Cliquen ist das aber falsch, siehe Aufgabe **??**. Im Falle der einfarbigen arithmetischen Progressionen ist es hingegen wahr: tatsächlich gilt die Aussage hier bereits dann, wenn die Partitionsklasse (hier die Menge A) lediglich einen festen ε-Anteil der natürlichen Zahlen enthält.

Satz 3.4 (Szemerédi, 1974)**.** *Für jede natürliche Zahl k und jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine kleinste natürliche Zahl $n(k, \varepsilon)$, so dass jede Teilmenge $A \subset [n]$ mit $|A| \geq \varepsilon n$ eine einfarbige arithmetische Progression der Länge k enthält.* □

Der Satz von Szemerédi ist ein sogenanntes *Dichte–Resultat*, weil er eine Aussage darüber macht, dass eine genügend hohe Dichte bereits reicht, um die gewünschte Substruktur zu erzwingen. (Weitere Beispiele für derartige Aussagen findet man in den Aufgaben **??**). Offensichtlich impliziert der Satz 3.4 den Satz 3.2, denn mindestens eine der r Farbklassen muss ja einen Anteil von $\varepsilon := 1/r$ bekommen. Er ist aber nicht mächtig genug, um eine berühmte alte Vermutung zu beweisen, derzufolge bereits die Menge der *Primzahlen* beliebig lange arithmetische Folgen enthält. Dies gelang Green und Tao im Jahr 2004, und mit ihrem Satz beenden wir dann auch dieses Kapitel.

Satz 3.5 (Green und Tao, 2004)**.** *Für jede natürliche Zahl k enthält die Menge aller Primzahlen eine arithmetische Progression der Länge k.* □

Literaturverzeichnis

[A] M. Aigner, *Diskrete Mathematik*, 6. Auflage, Vieweg, 2006.

[J] . Jukna, *Extremal Combinatorics*, Springer.

[GRS] R.L. Graham, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, *Ramsey Theory*, 2nd edition, Wiley, 1989.

[MN] J. Matousek und J. Nesetril, *Diskrete Mathematik*, 2. Auflage, Springer, 2007.

[S] A. Steger, *Diskrete Strukturen*, Band 1. 1. Auflage, Springer, 2001.