Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Optimierung 2, WS 2008/09

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt, Dipl.-Math. M. Ritter

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1
Gegeben seien ein primales LP

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ Ax \leq\ & b \end{aligned} \tag{P}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, x \in \mathbb{R}^n$, und das dazugehörige duale LP

$$\begin{aligned} \min\ & b^T y \\ A^T y =\ & c \\ y \geq\ & 0 \end{aligned} \tag{D}$$

mit $y \in \mathbb{R}^m$.

Wir nennen eine Basis B *primal zulässig*, wenn $x = A_B^{-1} b_B$ zulässige Lösung von (P) ist, und *dual zulässig*, wenn $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y_B = (A_B^T)^{-1} c$ und $y_i = 0\ \forall i \notin B$ zulässige Lösung des Dualen (D) ist.

a) Welche Informationen gewinnen Sie durch Lösen des dualen Problems mit dem Simplex-Algorithmus?

b) Interpretieren Sie Nebenbedingungen und Zielfunktion des dualen Problems geometrisch im Raum des primalen Problems.

c) Interpretieren Sie primal bzw. dual zulässige Basen geometrisch.

d) Skizzieren Sie ein 2-dimensionales Polyeder und geben Sie jeweils eine Basis an, die primal, aber nicht dual zulässig ist und umgekehrt.

e) Entwickeln Sie die geometrische Grundidee eines Algorithmus, der ausgehend von einer dual zulässigen Basis die optimale Ecke von (P) bestimmt. Was für Nachteile hat ein solcher Algorithmus?

f) Wie reagiert der Simplex Algorithmus bzw. Ihr Algorithmus auf das nachträgliche Hinzufügen von weiteren Nebenbedingungen nach der Optimierung?

g) Gegeben sei ein lineares Programm mit $m \gg n$. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der die bisherigen Ergebnisse benutzt, um eine optimale Ecke des LP zu bestimmen (und dabei schneller sein kann als der Simplex-Algorithmus).

Aufgabe 2.2 *Hausaufgabe*
Gegeben seien ein (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$ und ein Digraph $G' = (V', E')$ mit n bzw. n' Knoten und m bzw. m' Kanten. Weiter seien S_G und $S_{G'}$ die Inzidenzmatrizen von G und G' sowie A_G und $A_{G'}$ die Adjazenzmatrizen.

Bitte wenden!

a) Zeigen Sie: G enthält genau dann einen Kreis, wenn die Spalten von S_G im Vektorraum $\mathbb{Z}_2^n$ linear abhängig sind. Formulieren und beweisen Sie ein analoges Kriterium für G'.

b) Zeigen Sie: G enthält genau dann einen Weg von s nach t für beliebige $s, t \in V$ mit $s \neq t$, wenn der Vektor $u_s + u_t$ in dem von den Spalten von S_G aufgespannten Unterraum von $\mathbb{Z}_2^n$ liegt. Formulieren und beweisen Sie ein analoges Kriterium für G'.

c) Zeigen Sie: G' enthält genau dann einen Kreis der Länge k, wenn $A_{G'}$ eine quadratische $k \times k$-Teilmatrix besitzt, die sich als Summe einer Permutationsmatrix und einer 0-1 -Matrix schreiben lässt. (Eine Permutationsmatrix der Ordnung k ist eine Matrix aus $\{0,1\}^{k \times k}$ mit der Eigenschaft, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Eins-Eintrag steht.) Formulieren und beweisen Sie ein analoges Kriterium für G.

Die Abgabe der mit *Hausaufgabe* gekennzeichneten Aufgaben erfolgt *vor* Beginn Ihrer Übung persönlich bei Ihrer Tutorin bzw. Ihrem Tutor.