Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt, Dipl.-Math. M. Ritter

Optimierung 2, WS 2008/09

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1
Gegeben seien ein primales LP

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ Ax \leq\ & b \end{aligned} \tag{P}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, x \in \mathbb{R}^n$, und das dazugehörige duale LP

$$\begin{aligned} \min\ & b^T y \\ A^T y =\ & c \\ y \geq\ & 0 \end{aligned} \tag{D}$$

mit $y \in \mathbb{R}^m$.

Wir nennen eine Basis B *primal zulässig*, wenn $x = A_B^{-1} b_B$ zulässige Lösung von (P) ist, und *dual zulässig*, wenn $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y_B = (A_B^T)^{-1} c$ und $y_i = 0\ \forall i \notin B$ zulässige Lösung des Dualen (D) ist.

a) Welche Informationen gewinnen Sie durch Lösen des dualen Problems mit dem Simplex-Algorithmus?

b) Interpretieren Sie Nebenbedingungen und Zielfunktion des dualen Problems geometrisch im Raum des primalen Problems.

c) Interpretieren Sie primal bzw. dual zulässige Basen geometrisch.

d) Skizzieren Sie ein 2-dimensionales Polyeder und geben Sie jeweils eine Basis an, die primal, aber nicht dual zulässig ist und umgekehrt.

e) Entwickeln Sie die geometrische Grundidee eines Algorithmus, der ausgehend von einer dual zulässigen Basis die optimale Ecke von (P) bestimmt. Was für Nachteile hat ein solcher Algorithmus?

f) Wie reagiert der Simplex Algorithmus bzw. Ihr Algorithmus auf das nachträgliche Hinzufügen von weiteren Nebenbedingungen nach der Optimierung?

g) Gegeben sei ein lineares Programm mit $m \gg n$. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der die bisherigen Ergebnisse benutzt, um eine optimale Ecke des LP zu bestimmen (und dabei schneller sein kann als der Simplex-Algorithmus).

Lösung zu Aufgabe 2.1

a) Satz 4.1.7 erklärt den Zusammenhang: Finden wir eine bezüglich des dualen Problems optimale Ecke, so ist der Zielfunktionswert gleich dem optimalen Zielfunktionswert des primalen Problems. Falls das duale Problem unbeschränkt ist, ist das primale Problem unzulässig. Ist das duale Problem unzulässig, kann das primale Problem unzulässig oder unbeschränkt sein. Außerdem lässt sich – falls es eine duale Optimallösung gibt – aus der zugehörigen dual zulässigen Basis eine primale Optimallösung berechnen.

b) Die Nebenbedingungen des dualen Problems fordern, dass der Zielfunktionsvektor c als Nichtnegativkombination der Normalenvektoren zu den Nebenbedingungen des primalen Problems geschrieben werden kann (die duale Lösung y besteht gerade aus den Koeffizienten dieser Nichtnegativkombination). Addiert man die primalen Ungleichungen $a_i^T x \leq \beta_i$ entsprechend mit den Faktoren η_i auf, so erhält man $c^T x \leq b^T y$, also ist $b^T y$ für jedes dual zulässige y eine obere Schranke für die primale Zielfunktion. Im dualen Problem suchen wir diesbezüglich ein Minimum, also eine möglichst niedrige obere Schranke für den Zielfunktionswert des primalen Maximierungsproblems.

c) Eine primal zulässige Basis gehört zu einem Schnittpunkt der entsprechenden Nebenbedingungen und besagt, dass der Punkt zulässig ist, was genau eine Ecke des primalen Polyeders ergibt. Dual zulässige Basen gehören zu Normalenvektoren von Nebenbedingungen, so dass der Zielfunktionsvektor c in deren Kegel liegt. Zu einer optimalen Ecke des primalen Polyeders gehört daher eine Basis, die sowohl primal als auch dual zulässig ist.

d) Beispiel in V-Darstellung: $\operatorname{conv}\left\{(0,0)^T, (1,0)^T, (1,1)^T, (0,2)^T\right\}$, $c = (1,0)^T$. Dann ist $(2,0)^T = 2((1,1)^T + (0,-1)^T)$ Schnittpunkt zweier Nebenbedingungen, nicht primal, aber dual zulässig.

e) Wir starten mit einer dual zulässigen Basis (duales Aufaddieren liefert solch eine oft sehr schnell und einfach) und führen dann eine Wanderung in den dual zulässigen Basen durch. Wir führen Basiswechsel so durch, dass unsere Zielfunktion (die obere Schranke für das primale Problem) kleiner wird. Dieser Algorithmus wird auch *dualer Simplex* genannt.

   Nachteil dieses Vorgehens ist, dass wir bis zum letzten Schritt nicht primal zulässig sind, denn nur die optimalen Ecken sind sowohl primal als auch dual zulässig (wegen des Dualitätssatzes: $c^T x = c^T b A^{-1} = b^T c (A^T)^{-1} = b^T y$ genau in den optimalen Ecken).

f) Durch nachträgliches Hinzufügen von Nebenbedingungen kann unsere optimale Ecke im primalen Polyeder primal unzulässig werden. Sie ist allerdings weiterhin dual zulässig, denn an der entsprechenden Basis und der Zielfunktion hat sich ja nichts verändert!

   Der Simplex-Algorithmus auf dem primalen Polyeder muss neu gestartet werden, während der duale Simplex mit der zuvor bestimmten Basis weitermachen kann.

g) Wir beginnen mit n Nebenbedingungen und optimieren bezüglich dieser. Ist die gefundene dual optimale Basis auch primal zulässig, sind wir fertig. Sonst nehmen wir einige der m Nebenbedingungen hinzu und arbeiten von der aktuellen dualen Optimalbasis aus weiter, bis wir eine primal zulässige Basis finden, welche dann auch primal optimal ist.

Aufgabe 2.2 *Hausaufgabe*
Gegeben seien ein (ungerichteter) Graph $G = (V, E)$ und ein Digraph $G' = (V', E')$ mit n bzw. n' Knoten und m bzw. m' Kanten. Weiter seien S_G und $S_{G'}$ die Inzidenzmatrizen von G und G' sowie A_G und $A_{G'}$ die Adjazenzmatrizen.

a) Zeigen Sie: G enthält genau dann einen Kreis, wenn die Spalten von S_G im Vektorraum $\mathbb{Z}_2^n$ linear abhängig sind. Formulieren und beweisen Sie ein analoges Kriterium für G'.

b) Zeigen Sie: G enthält genau dann einen Weg von s nach t für beliebige $s, t \in V$ mit $s \neq t$, wenn der Vektor $u_s + u_t$ in dem von den Spalten von S_G aufgespannten Unterraum von $\mathbb{Z}_2^n$ liegt. Formulieren und beweisen Sie ein analoges Kriterium für G'.

c) Zeigen Sie: G' enthält genau dann einen Kreis der Länge $k \geq 3$, wenn $A_{G'}$ eine quadratische $k \times k$-Teilmatrix mit gleichen Zeilen- und Spaltenindices besitzt, die sich als Summe einer zyklischen Permutationsmatrix und einer 0-1 -Matrix schreiben lässt. (Eine Permutationsmatrix der Ordnung k ist eine Matrix aus $\{0,1\}^{k \times k}$ mit der Eigenschaft, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Eins-Eintrag steht. Sie ist zyklisch genau dann, wenn sie keine echte Permutationsteilmatrix mit gleichen Zeilen und Spaltenindices und mehr als einer Zeile bzw. Spalte besitzt.) Formulieren und beweisen Sie ein analoges Kriterium für G.

Lösung zu Aufgabe 2.2
Wir bezeichnen die Summe aller Elemente einer Zeile im Folgenden auch als Summe der Zeile. Nach Vorlesung ist ein Weg ein Kantenzug ohne Wiederholung von Knoten, und ein Kreis ein geschlossener Weg.

Die Argumente für S_G, $S_{G'}$ beziehen sich auf Teilmengen der Spalten der Matrix, was Teilmengen der Kanten entspricht. Für eine Teilauswahl der Spalten ist die Summe der Zeile die Summe alle Elemente in der Zeile, die in den ausgewählten Spalten liegen.

a) G enthalte einen Kreis. Wählt man nun alle Spalten der zugehörigen Kanten in S_G, so stehen in jeder Zeile genau zwei Einsen (oder gar keine), was sich im $\mathbb{Z}_2^n$ zu 0 aufaddiert. Hier sind dadurch die Spalten linear abhängig. Für $S_{G'}$ sind für Knoten auf dem Kreis genau eine -1 und eine 1 in der Zeile der dazugehörigen Spaltenauswahl, so dass wir im $\mathbb{R}^n$ erneut auf 0 aufaddieren.

   Sind die Spalten von S_G im $\mathbb{Z}_2^n$ linear abhängig, so gibt es eine inklusionsminimale Teilauswahl der Spalten (entsprechend einer Kantenmenge $F \subset E$), so dass sich jede Zeile genau zu 0 aufsummiert. Jede auftauchende 1 in einer Zeile (d.h. eine inzidente Kante bei einem Knoten) muss durch eine weitere 1 in der selben Zeile (eine weitere inzidente Kante) kompensiert werden. Damit besitzt jeder Knoten in $(V(F), F)$ geraden Grad, und man kann (analog zur Existenz eines Eulerwegs) einen Kreis wie folgt konstruieren: Starte bei einem beliebigen Knoten in $V(F)$ und wähle eine der zu ihm inzidenten Kanten (es gibt mindestens zwei). Laufe über diese Kante zum benachbarten Knoten und wähle eine weitere, mit diesem inzidente und noch nicht verwendete Kante. Führe das solange fort, bis ein bereits besuchter Knoten wieder besucht wird, damit schließt sich ein Kreis. Diese Situation muss nach endlich vielen Schritten auftreten, da jeder noch nicht besuchte Knoten zu mindestens zwei Kanten inzident ist, der Algorithmus kann also immer weiterlaufen (es kann niemals einen noch nicht besuchten Knoten geben, der keine nicht unbenutzte Ausgangskante mehr hat), bis ein Knoten zum zweitenmal besucht wird. Inklusionsminimalität erzeugt auf diese Weise gerade einen Spalten- d.h. Kantenauswahl eines Kreies.

Für $S_{G'}$ wird analog jede 1 durch eine -1 kompensiert. Hier ersetzen wir das Aufsummieren der Spalten auf den Nullvektor in $\mathbb{Z}_2^n$ durch Aufsummieren auf den Nullvektor in $\mathbb{R}^n$.

b) Wir fügen dem Graphen (falls noch nicht enthalten) eine Kante $\{t, s\}$ oder (t, s) hinzu und können dadurch die Argumente von Teilaufgabe a) erneut benutzen:

Einen Weg von s nach t gibt es genau dann, wenn in dem Graphen mit Extrakante ein Kreis durch die beiden Knoten existiert, d.h. wenn es eine inklusionsminimale Spaltenauswahl gibt, die sich in $\mathbb{Z}_2^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$ auf den Nullvektor aufaddiert. Lässt man bei dieser die Extrakante weg, bleibt genau der Vektor $u_s + u_t$. Im gerichteten Fall haben wir den Vektor $-u_s + u_t$.

c) Besitzt G' einen Kreis der Länge k, so wählen wir die zugehörigen k Zeilen und Spalten der beteiligten Knoten aus. Der Kreis identifiziert für jeden i-ten Knoten eine eindeutige eingehende (Spalte) und ausgehende (Zeile) Kante, wir markieren die zugehörigen Einsen in der i-ten Zeile und i-ten Spalte. So erhalten wir genau eine markierte 1 in jeder Spalte und jeder Zeile, eine Permutationsmatrix. Lässt man einen Knoten (mit seinen zwei Kanten) weg, so haben wir keinen Kreis mehr, damit ist die Permutationsmatrix zyklisch.

Wenn wir eine (zyklische) Permutationsmatrix haben, dann können wir durch sie einen Kreis identifizieren: Für jeden Knoten ist eindeutig definiert, welche Kante hinausläuft (Zeile), und welche hineinläuft (Spalte). Evtl. noch vorhandene weitere Kanten bilden die zweite 0-1-Matrix.

Dieses System funktioniert sowohl für $A_{G'}$, als auch für A_G. Man beachte, dass A_G symmetrisch ist, wir können den Kreis also in zwei Richtungen durchlaufen oder markieren.