



Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt, Dipl.-Math. M. Ritter

Optimierung 2, WS 2008/09

Übungsblatt 3

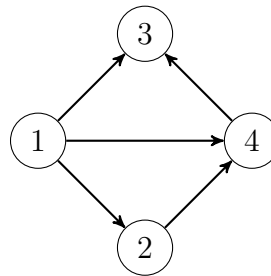
Aufgabe 3.1

Zeigen Sie: Ein Digraph G besitzt genau dann einen Kreis der Länge $k \geq 3$ als induzierten Subgraphen, wenn die Adjazenzmatrix A_G eine zyklische $k \times k$ -Permutationsmatrix mit den selben Zeilen- und Spaltenindices als Teilmatrix enthält. Gilt die Aussage auch für Graphen?

Aufgabe 3.2

Sei $G = (V, E)$ ein Digraph mit Adjazenzmatrix A_G .

- a) Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix A_G des unten abgebildeten Digraphen. Berechnen Sie A_G^2 , A_G^3 und zeichnen Sie die zugehörigen Digraphen ein.



- b) Ist A_G^k für beliebiges k (und beliebigen Digraphen G) wieder Adjazenzmatrix eines Digraphen? Geben sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an!
- c) Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen G und A_G^k bzw. dem zugehörigen Digraphen für $k \in \mathbb{N}$ her. Beweisen Sie Ihre Vermutung.
- d) Entwickeln Sie einen Algorithmus, der die Potenzen A_G^k benutzt, um zu ermitteln, ob es für zwei Knoten $s, t \in V$ einen Weg von s nach t gibt und ggf. einen kürzesten Weg von s nach t zu bestimmen.
- e) Entwickeln Sie einen Algorithmus, der die Potenzen A_G^k benutzt, um alle Kreise in einem Digraphen G zu identifizieren.

Aufgabe 3.3 *Hausaufgabe*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a) In jedem Graphen mit $n \geq 2$ Knoten gibt es zwei Knoten gleichen Grades.
- b) Jeder kreisfreie, zusammenhängende Graph mit $n \geq 2$ Knoten besitzt mindestens zwei Knoten mit Grad 1.