Optimierung 2, WS 2008/09

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt, Dipl.-Math. M. Ritter

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1
Für vollständigen Graphen $K_n = (V, E)$ und eine Gewichtsfunktion $d : E \to \mathbb{N}$ sagt man, d *erfüllt die Dreiecksungleichung*, falls für je drei paarweise verschiedene Knoten $i, j, k \in V$ gilt: $d(i, j) + d(j, k) \geq d(i, k)$.

a) Zeigen Sie: Jeder Graph, bei dem der Grad jedes Knotens gerade ist (und der mindestens eine Kante enthält), enthält einen Kreis.

b) Eine Eulertour in einem Graphen ist ein einfacher Kantenzug, der jede Kante des Graphen genau einmal enthält. Finden Sie eine Eulertour in dem Graphen in Abbildung 1.

c) Zeigen Sie: Ein zusammenhängender Graph, bei dem der Grad jedes Knotens gerade ist, enthält eine Eulertour. Überlegen Sie sich, wie Sie in einem solchen Graphen eine Eulertour konstruieren können.

d) Sei $K_n = (V, E)$ der vollständige Graph auf n Knoten mit Gewichtsfunktion d, $G = (V, E')$ ein spannender Subgraph des K_n mit $E' \subset E$ und $T = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ mit $e_1, \ldots, e_m \in E'$ eine Eulertour der Länge $d(T)$ in G. Zeigen Sie: Falls d die Dreiecksungleichung erfüllt, enthält K_n eine Traveling Salesman-Tour, die höchstens Länge $d(T)$ besitzt. Wie lässt sich die TSP-Tour konstruktiv aus der Eulertour gewinnen?

e) Sei K_n der vollständige Graph auf n Knoten und sei d eine Gewichtsfunktion für K_n, die die Dreiecksungleichung erfüllt. Verwenden Sie die obigen Aussagen, um einen Algorithmus anzugeben, der eine TSP-Tour τ auf K_n konstruiert, die die Ungleichung

$$d(\tau) \leq 2 \cdot d(\tau_{\text{opt}})$$

erfüllt, wobei τ_{opt} eine optimale TSP-Tour ist. (So ein Algorithmus heißt übrigens 2-*Approximation* für TSP).

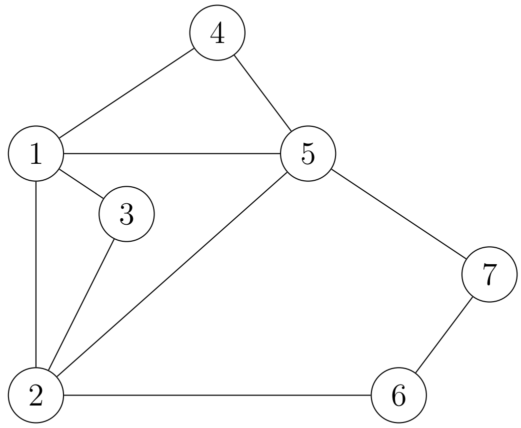

Abbildung 1: Finden Sie eine Eulertour

Aufgabe 5.2 *Hausaufgabe*

a) Wie viele verschiedene kardinalitätsmaximale Matchings gibt es in $K_{m,n}$ für $m \leq n$?

b) Seien $s \neq t$ Knoten in $K_{n,n}$. Wie viele verschiedene Wege gibt es zwischen s und t?

Die Abgabe der mit *Hausaufgabe* gekennzeichneten Aufgaben erfolgt *vor* Beginn Ihrer Übung persönlich bei Ihrer Tutorin bzw. Ihrem Tutor.