Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt, Dipl.-Math. M. Ritter

Optimierung 2, WS 2008/09

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1
Sei $G = (V, E)$ ein Digraph. Ein Weg in G, der jeden Knoten genau einmal enthält, heißt **gerichteter Hamiltonweg**.

Für $e = (u, v) \in E$ sei weiter $\widehat{e} := \{u, v\}$ und $\widehat{G} := (V, \widehat{E})$ mit $\widehat{E} = \{\widehat{e} : e \in E\}$. Die Notation „$\widehat{\bullet}$" wird im Folgenden stets in diesem Sinne verwendet.

a) Das graphische Matroid $\widehat{M} = (\widehat{E}, \widehat{\mathcal{I}})$ von $\widehat{G}$ enthält als unabhängige Mengen gerade die kreisfreien Teilgraphen von $\widehat{G}$, vgl. Lemma 5.2.11.
Zeigen Sie: Mit der Setzung

$$\mathcal{I} := \left\{ I \subseteq E : \widehat{I} \in \widehat{\mathcal{I}} \text{ und für alle } e_1, e_2 \in I \text{ mit } \widehat{e_1} = \widehat{e_2} \text{ gilt } e_1 = e_2 \right\}$$

ist $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid.

b) Definieren Sie zwei weitere Matroide $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$, so dass gilt: Die Mengen der Kardinalität $|V| - 1$ in $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ sind genau die gerichteten Hamiltonwege in G.

Hinweis: Welche Zusatzbedingungen sichern, dass von den Elementen von $\mathcal{I}$ diejenigen ausgewählt werden, die eine Vereinigung von Wegen sind?

Lösung zu Aufgabe 7.1

a) Eine Menge $I \in \mathcal{I}$ zeichnet sich per Definition durch zwei Eigenschaften aus:

$$(*) \quad \widehat{I} \in \widehat{\mathcal{I}} \qquad \text{und} \qquad (**) \quad e_1, e_2 \in I \wedge \widehat{e_1} = \widehat{e_2} \Rightarrow e_1 = e_2 \quad .$$

Nun ist M ein Unabhängigkeitssystem, denn für jede Teilmenge I' einer Menge $I \in \mathcal{I}$ überträgt sich Eigenschaft $(**)$ natürlich von I auf I', und weiter ist $\widehat{I'} \subseteq \widehat{I}$ und damit $\widehat{I'} \in \widehat{\mathcal{I}}$, da $\widehat{M}$ ein Unabhängigkeitssystem ist, womit $(*)$ für I' nachgewiesen ist.
Wir müssen noch zeigen, dass M die Austauschbedingung erfüllt. Dazu seien $I_p, I_{p+1} \in \mathcal{I}$ mit $p = |I_p|$ und $p + 1 = |I_{p+1}|$. Wir wissen, dass wir $e \in I_{p+1} \setminus I_p$ wählen können, sodass für das entsprechende $\widehat{e} \in \widehat{I_{p+1}} \setminus \widehat{I_p}$ gilt $\widehat{I_p} \cup \{\widehat{e}\} \in \widehat{\mathcal{I}}$. Offenbar ist nun $I_p \cup \{e\} \in \mathcal{I}$, was zu zeigen war.

b) Der Beweis läuft darauf hinaus, die Matroide M_1 und M_2 so zu definieren, dass die Kantenmengen in $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ genau die disjunkten Vereinigungen von Wegen sind. Insbesondere sind dann die Mengen der Kardinalität $|V| - 1$ Hamiltonwege.

Die Kantenmengen in $\mathcal{I}$ induzieren in G "gerichtete Bäume", die damit insbesondere kreisfrei sind. Damit $W \in \mathcal{I}$ eine disjunkte Vereinigung von Wegen ist, müssen wir zwei zusätzliche Bedingungen sichern:

- (T) Keine zwei Kanten in W dürfen den gleichen Startknoten (engl.: *tail*) haben;
- (H) keine zwei Kanten in W dürfen den gleichen Endknoten (engl.: *head*) haben.

Die Bedingungen (T) und (H) lassen sich in Matroide übersetzen: Eine Kantenmenge $W \subseteq E$ erfüllt Bedingung (T) genau dann, wenn sie Element von

$$\mathcal{I}_1 := \mathcal{I}_{\mathrm{T}} := \{I \subseteq E \mid (v, w_1), (v, w_2) \in I \ \Rightarrow w_1 = w_2\}$$

ist, und sie erfüllt die Bedingung (H) genau dann, wenn sie Element von

$$\mathcal{I}_2 := \mathcal{I}_{\mathrm{H}} := \{I \subseteq E \mid (v_1, w), (v_2, w) \in I \ \Rightarrow v_1 = v_2\}$$

ist. Wir zeigen nun, dass $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ und $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ Matroide sind, genauer: dass es sich um Partitionsmatroide handelt. (Diese speziellen Matroide werden auch als **Tail-Partition-Matroid** und **Head-Partition-Matroid** bezeichnet). Wir definieren

$$E_w^{(\mathrm{H})} := \{(v, w) \mid (v, w) \in E \ \wedge \ v \in V\} \quad \forall w \in V \quad .$$

Offenbar enthält $E_w^{(\mathrm{H})}$ alle Kanten in G, die den Knoten w als Endknoten haben. Nun ist $\mathcal{E}^{(\mathrm{H})} := \{E_w^{(\mathrm{H})} \mid w \in V\}$ eine Partition von E und das zugehörige Partitionsmatroid ist gerade M_1. Analog definiert man Mengen $E_w^{(\mathrm{T})}$ und $\mathcal{E}^{(\mathrm{T})}$ und zeigt, dass M_2 ein Partitionsmatroid ist.

Kantenmengen in $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ erfüllen also (H), (T) und sind kreisfrei. Damit sind sie genau die disjunkten Vereinigungen von Wegen in G und der gewünschte Durchschnitt dreier Matroide ist konstruiert.

Aufgabe 7.2

Ein Matroid muss bekanntlich zwei Eigenschaften erfüllen: Es muss ein Unabhängigkeitssystem sein und es muss die Austauschbedingung erfüllen. In 5.2.25 wurde gezeigt, dass ein Unabhängigkeitssystem genau dann ein Matroid ist, wenn der Greedy-Algorithmus für jeden Zielfunktionsvektor c immer eine optimale Lösung liefert.

Einige Optimierungsprobleme lassen sich aber auch mit dem Greedy-Algorithmus lösen, obwohl gar kein Unabhängigkeitssystem zugrundeliegt. Wir betrachten in dieser Aufgabe ein solches Problem.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Kantengewichtung. Das Mengensystem $\mathcal{T}$ sei definiert durch

$$\mathcal{T} := \{T \subseteq E : T \text{ induziert einen aufspannenden Baum in } G\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(E, \mathcal{T})$ zwar die Austauschbedingung erfüllt, aber kein Unabhängigkeitssystem ist.

b) Die *monotone Hülle* $(E, \widetilde{\mathcal{T}})$ von $(E, \mathcal{T})$ ist definiert durch

$$\widetilde{\mathcal{T}} := \left\{ \widetilde{T} \subseteq E : \text{es gibt } T \in \mathcal{T} \text{ mit } \widetilde{T} \subset T \right\}.$$

Zeigen Sie: Ist $(E, \widetilde{\mathcal{T}})$ ein Matroid, so liefert der Greedy-Algorithmus über $(E, \widetilde{\mathcal{T}})$ eine Optimallösung für das Problem $\max_{T \in \mathcal{T}} c(T)$.

c) Beweisen oder widerlegen Sie: Erfüllt ein Mengensystem $(E, \mathcal{I})$ die Austauschbedingung, so ist seine monotone Hülle $(E, \widetilde{\mathcal{I}})$ ein Matroid. *Hinweis: Betrachten Sie das Problem gerichteter Hamiltonwege aus der vorigen Aufgabe.*

d) Ein Mengensystem $(E, \mathcal{I})$ heißt *k-uniform* für ein $k \in \mathbb{N}$, wenn $|I| = k$ für alle $I \in \mathcal{I}$. Zeigen Sie: Ist $(E, \mathcal{I})$ ein k-uniformes Mengensystem so, dass $(E, \widetilde{\mathcal{I}})$ ein Matroid ist, dann gilt:

Für alle $I, I' \in \mathcal{I}$ gibt es $u \in I \setminus I'$ und $u' \in I' \setminus I$, so dass $(I \setminus \{u\}) \cup \{u'\} \in \mathcal{I}$.

e) Gilt auch die Umkehrung der Aussage aus Teilaufgabe d)?

Lösung zu Aufgabe 7.2

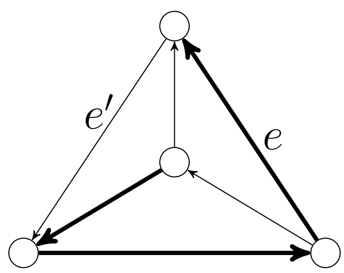
a) Die Aussage ist trivial, da alle Elemente von $\mathcal{T}$ gleiche Kardinalität haben.

b) Wir müssen zeigen, dass $\max_{T \in \mathcal{T}} c(T) = \max_{T \in \widetilde{\mathcal{T}}} c(T)$. Da $c \geq 0$ vorausgesetzt wurde und da $\mathcal{T} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}$ gilt, ist

$$\max_{T \in \mathcal{T}} c(T) \leq \max_{T \in \widetilde{\mathcal{T}}} c(T) \quad .$$

Sei nun $T^* \in \widetilde{\mathcal{T}}$ derart, dass $c(T^*) = \max_{T \in \widetilde{\mathcal{T}}} c(T)$. Dann ist $c(T^*) \leq c(T')$ für alle $T' \in \mathcal{T}$ mit $T^* \subseteq T'$ (wieder geht $c \geq 0$ ein). Daraus und aus der Definition von $\widetilde{\mathcal{T}}$ folgt $c(T^*) \leq \max_{T \in \mathcal{T}} c(T)$ und damit die Behauptung.

c) Wir widerlegen die Behauptung, indem wir das System der gerichteten Hamiltonwege betrachten: Hier erfüllt $(E, \mathcal{I})$ trivialerweise die Austauschbedingung, da alle (gerichteten) Hamiltonwege die gleiche Kardinalität (nämlich $|V| - 1$) haben. Um zu zeigen, dass $(E, \widetilde{\mathcal{I}})$ der Austauschbedingung nicht genügt, geben wir ein Gegenbeispiel an:



Im abgebildeten gerichteten Graphen sind zwei disjunkte gerichtete Hamiltonwege H_1 (fett) und H_2 (dünn) eingezeichnet. Entfernt man eine Kante aus H_1, so kann der so entstandene Unterweg nicht mit einer Kante aus H_2 zu einem gerichteten Hamiltonweg ergänzt werden. Also gilt die Austauschbedingung nicht.

Das gleiche Beispiel zeigt, dass der Greedy-Algorithmus zur Bestimmung eines Hamiltonweges i.A. versagt: Wird im ersten Schritt die Kante e und im zweiten die Kante e' gewählt, so kann der erhaltene Weg nicht zu einem gerichteten Hamiltonweg ergänzt werden.

d) Seien $I, I' \in \mathcal{I}$, o.E. $I \neq I'$, und sei weiter $t \in I \setminus I'$. Die Mengen $I \setminus \{t\}$ und I' sind offenbar Elemente von $\widetilde{\mathcal{I}}$ und offenbar ist $k = |I'| = |I \setminus \{t\}| + 1$. Wenn wir voraussetzen, dass $(E, \widetilde{\mathcal{I}})$ ein Matroid ist, so gibt es ein $t' \in I'$, so dass $I'' := (I \setminus \{t\}) \cup \{t'\} \in \widetilde{\mathcal{I}}$ und $|I''| = k$ gilt. Da t aus $I \setminus I'$ gewählt war, muss $t' \in I' \setminus I$ gelten. Wenn wir jetzt noch zeigen, dass $I'' \in \mathcal{I}$ gilt, sind wir fertig. Letzteres ist aber wahr, da alle Mengen in $\widetilde{\mathcal{I}}$ der Kardinalität k bereits in $\mathcal{I}$ liegen.

e) Die Umkehrung der Aussage gilt nicht. Als Gegenbeispiel betrachten wir das Mengensystem $\mathcal{T} := \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}$. Man verifiziert direkt, dass $\mathcal{T}$ die Austauschbedingung in Aufgabe *d)* erfüllt. Aber $(E, \widetilde{\mathcal{T}})$ ist kein Matroid, denn $\widetilde{\mathcal{T}} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \emptyset\}$ und die Menge $\{b\} \in \widetilde{\mathcal{T}}$ und $\{c, d\} \in \widetilde{\mathcal{T}}$ erfüllen nicht die ursprüngliche Austauschbedingung. (Alternative Begründung: Mit $c(a) = 0$, $c(b) = 15$ und $c(c) = c(d) = 10$ liefert der Greedy-Algorithmus zum Maximierungsproblem über $\widetilde{\mathcal{T}}$ nicht das Optimum).

Aufgabe 7.3 *Hausaufgabe*
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\mathcal{I}$ bezeichne die Menge aller Teilmengen $I \subset V$ von V, so dass ein Matching M in G existiert, das I überdeckt (d. h. M enthält alle Knoten von I). Zeigen Sie: $(V, \mathcal{I})$ ist ein Matroid.

Lösung zu Aufgabe 7.3
$(V, \mathcal{I})$ ist trivialerweise ein Unabhängigkeitssystem, da eine Teilmenge einer überdeckbaren Knotenmenge sicher auch überdeckbar ist. Seien I_p, $I_{p+1} \in \mathcal{I}$ mit $|I_p| = |I_{p+1}| - 1 = p$. Ferner seien M_p und M_{p+1} Matchings, die I_p bzw. I_{p+1} überdecken.

Gibt es ein $v \in I_{p+1} \backslash I_p$ und eine Kante $e \in E$ mit $v \in e \in M_p$, so überdeckt M_p bereits $I_p \cup \{v\}$, und es folgt die Behauptung.

Wir nehmen also an, dass es kein solches v gibt. Sei $S = (M_p \backslash M_{p+1}) \cup (M_{p+1} \backslash M_p)$. S besteht dadurch aus alternierenden Kreisen und Wegen (deren "innere" Knoten in $M_p \cap M_{p+1}$ liegen). Aus der Fallvoraussetzung folgt daher, dass keiner dieser inneren Knoten in $I_{p+1} \backslash I_p$ liegen kann. In jedem Kreis liegen also mindestens so viele Knoten in I_p wie in I_{p+1}, selbiges gilt für Wege mit einem Endknoten $v \in I_p \backslash I_{p+1}$. Ein Knoten $v \in I_p \cap I_{p+1}$ kann allerdings kein Endknoten eines solchen Weges sein nach Konstruktion von S. Da $|I_{p+1}| > |I_p|$ folgt also, dass mindestens ein alternierender Weg W existiert mit Endpunkten $v_1 \in I_{p+1} \backslash I_p$ und $v_2 \notin I_p$. Dann ist $(M_p \backslash W) \cup (W \backslash M_p)$ ein Matching, das $I_p \cup \{v_1\}$ überdeckt.