Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Optimierung 2, WS 2008/09

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt, Dipl.-Math. M. Ritter

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine *stabile Menge* in G ist eine Teilmenge $S \subset V$ der Knoten, so dass der von S induzierte Subgraph von G keine Kanten enthält. Eine Clique in G ist eine Teilmenge $C \subset V$ der Knoten, so dass der von C induzierte Subgraph isomorph zu $K_{|C|}$ ist. Betrachten Sie folgende Probleme:

Problem (Maximale stabile Menge)
Gegeben: *Ein Graph $G = (V, E)$.*

Auftrag: *Bestimme eine kardinalitätsmaximale stabile Menge in G.*

Problem (Maximale Clique)
Gegeben: *Ein Graph $G = (V, E)$.*

Auftrag: *Bestimme eine kardinalitätsmaximale Clique in G.*

a) Formulieren Sie die zu Maximale stabile Menge und Maximale Clique gehörigen Entscheidungsprobleme und zeigen Sie, dass diese in $\mathcal{NP}$ sind.

b) Zeigen Sie, dass Maximale stabile Menge und Maximale Clique polynomiell äquivalent sind.

Aufgabe 9.2

Sei $G = (V, E)$ ein Graph oder ein Digraph. Ein Weg in G, der alle Knoten aus V genau einmal enthält, heißt *Hamilton-Weg*.

Betrachten Sie folgende Probleme:

Problem (Gerichteter minimaler Hamilton-Weg)
Gegeben: *Ein Digraph $G = (V, E)$ und eine Kantengewichtung $\phi : E \to \mathbb{N}_0$.*

Auftrag: *Bestimme einen ϕ-kürzesten Hamilton-Weg in G oder entscheide, dass G keinen Hamilton-Weg besitzt.*

Problem (Gerichteter global kürzester Weg)
Gegeben: *Ein Digraph $G = (V, E)$ und eine Kantengewichtung $\phi : E \to \mathbb{Z}$.*

Auftrag: *Bestimme einen ϕ-kürzesten Weg in G.*

a) Formulieren Sie einen Algorithmus, der gerichteter global kürzester Weg benutzt, um zu entscheiden, ob ein Digraph $G = (V, E)$ einen Hamilton-Weg besitzt.

b) Zeigen Sie, dass sich GERICHTETER MINIMALER HAMILTON-WEG polynomiell auf GERICHTETER GLOBAL KÜRZESTER WEG reduzieren lässt.

Aufgabe 9.3 *Hausaufgabe*
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knotenüberdeckung von G ist eine Teilmenge $K \subset V$, so dass für alle $\{v_1, v_2\} \in E$ gilt: $\{v_1, v_2\} \cap K \neq \emptyset$. Die Definition einer stabilen Menge finden Sie in Aufgabe 9.1.

Betrachten Sie folgende Probleme:

Problem (MAXIMALE STABILE MENGE)
Gegeben: *Ein Graph $G = (V, E)$.*

Auftrag: *Bestimme eine kardinalitätsmaximale stabile Menge in G*

Problem (MINIMALE KNOTENÜBERDECKUNG)
Gegeben: *Ein Graph $G = (V, E)$.*

Auftrag: *Bestimme eine kardinalitätsminimale Knotenüberdeckung.*

Zeigen Sie, dass MINIMALE KNOTENÜBERDECKUNG und MAXIMALE STABILE MENGE polynomiell äquivalent sind.

Die Abgabe der mit *Hausaufgabe* gekennzeichneten Aufgaben erfolgt *vor* Beginn Ihrer Übung persönlich bei Ihrer Tutorin bzw. Ihrem Tutor.