Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Optimierung 2, WS 2008/09

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt, Dr. M. Ritter

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1
Betrachten Sie das Problem SUBSET SUM aus Aufgabe 8.2:

Problem (SUBSET SUM)
Gegeben: *Eine Menge* $S = \{s_1, ..., s_n\}$ *mit* $s_i \in \mathbb{Z}\ \forall i \in \{1, ..., n\}$, $\beta \in \mathbb{Z}$.

Auftrag: *Entscheide, ob eine Teilmenge* $S' \subset S$ *existiert, so dass*

$$\sum_{x \in S'} x = \beta.$$

a) Zeigen Sie, dass SUBSET SUM in $\mathcal{NP}$ liegt.

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der SUBSET SUM mit dynamischer Optimierung löst und dazu eine *Rückwärtsrekursion* verwendet. Beachten Sie den Sonderfall $\beta = 0$!

c) Beweisen Sie, dass SUBSET SUM (durch dynamische Optimierung) in pseudo-polynomieller Zeit gelöst werden kann.

Aufgabe 10.2
Ein umweltbewußter Student möchte zwar weiterhin mit seinem Auto von seinem Wohnheim in München an die TU nach Garching fahren, dabei aber nicht zuviel Benzin verbrauchen. Die möglichen Verbindungen seien durch einen Digraphen $G = (V, E)$ und zwei Knoten s (Studentenwohnung) und t (TUM) gegeben. Die Fahrzeiten und den Spritverbrauch je Kante geben zwei Abbildungen $l : E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $d : E \longrightarrow \mathbb{N}_0$ (Spritverbrauch fällt nur in ganzzahligen Einheiten an). Der Student möchte für seine Fahrten einen Gesamtverbrauch von $D \in \mathbb{N}$ (einfache Fahrt) nicht überschreiten.

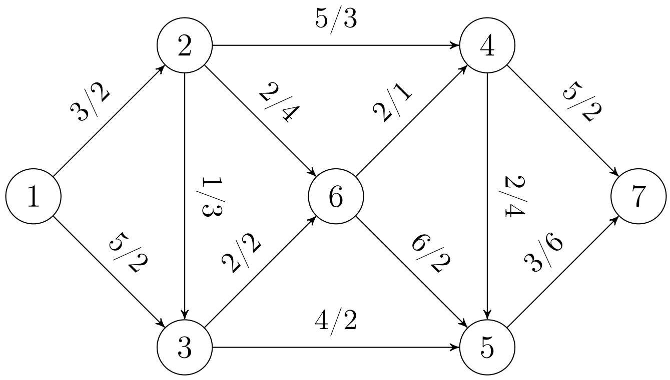
a) Bestimmen Sie in dem untenstehenden Graphen den kürzesten s-t-Weg ohne Beachtung des Verbrauchs. Welchen Spritverbrauch erfordert dieser Weg?

b) Sei $\xi_j(\delta)$ die Länge eines kürzesten s-j-Weges, auf dem höchstens δ Einheiten Sprit verbraucht werden. Formulieren Sie eine Rekursion für die $\xi_j(\delta)$.

c) Verwenden Sie die Rekursion aus b), um unter Verwendung von dynamischer Optimierung einen Algorithmus zu entwerfen, der für gegebenes D die Länge eines kürzesten s-t-Weges bestimmt, auf dem insgesamt nicht mehr als D Liter Sprit verbraucht werden. Skizzieren Sie zunächst einen geeigneten Schichtgraphen, definieren Sie Knoten und Kanten dieses Schichtgraphen und eine passende Stufenkostenfunktion.

d) Lösen Sie mit Ihrem Algorithmus das Problem auf untenstehendem Graphen für $D = 8$.

e) Wie hoch ist die Laufzeit Ihres Algorithmus? Bestimmen Sie eine möglichst gute obere Schranke in Abhängigkeit von den Größen im Input.



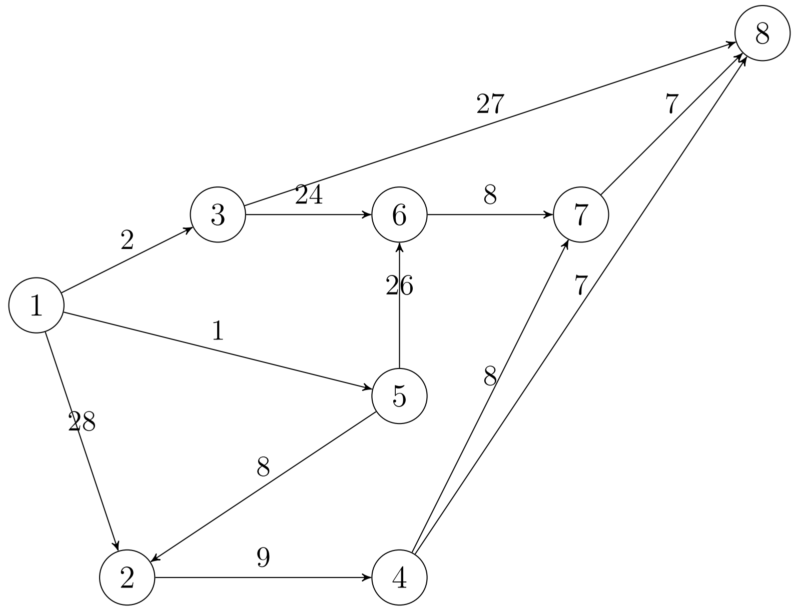
Beschriftung der Kanten: l_{ij}/d_{ij}

Aufgabe 10.3 *Hausaufgabe*
Gegeben sei der Graph $G = (V, E, c)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_8\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_{12}\}$, wobei

$$\begin{aligned} e_1 &= (v_1, v_2), & e_2 &= (v_1, v_3), & e_3 &= (v_1, v_5),\\ e_4 &= (v_2, v_4), & e_5 &= (v_3, v_6), & e_6 &= (v_3, v_8),\\ e_7 &= (v_4, v_7), & e_8 &= (v_4, v_8), & e_9 &= (v_5, v_2),\\ e_{10} &= (v_5, v_6), & e_{11} &= (v_6, v_7), & e_{12} &= (v_7, v_8), \end{aligned}$$

und $(c(e_1), \ldots, c(e_{12})) = (28, 2, 1, 9, 24, 27, 8, 7, 8, 26, 8, 7)$.

Berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus den kürzesten Weg zwischen den Ecken v_1 und v_8. Skizzieren Sie jeden Zwischenschritt grafisch!



Die Abgabe der mit *Hausaufgabe* gekennzeichneten Aufgaben erfolgt *vor* Beginn Ihrer Übung persönlich bei Ihrer Tutorin bzw. Ihrem Tutor.