



# Technische Universität München

## Zentrum Mathematik

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt, Dr. M. Ritter

### Optimierung 2, WS 2008/09

### Übungsblatt 13

---

#### Aufgabe 13.1

Betrachten Sie das folgende Problem:

#### Problem (GITTERBASIS-TRANSFORMATION)

**Gegeben:**  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^m$

**Auftrag:** Bestimme eine Basis  $b_1, \dots, b_k$  von  $L := \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z} \right\}$  mit  $u_i^T b_j = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $i < j$ .

- Erklären Sie detailliert, wie Sie eine Instanz von GITTERBASIS-TRANSFORMATION lösen können.
- Zeigen Sie: GITTERBASIS-TRANSFORMATION kann in polynomieller Zeit gelöst werden.
- Seien  $v_1 = (1, 0, 1, 2)^T, v_2 = (2, 2, 3, -1)^T, v_3 = (3, 2, 4, 1)^T, v_4 = (2, -1, 4, 0)^T$ . Lösen Sie GITTERBASIS-TRANSFORMATION für den Input  $v_1, v_2, v_3, v_4$ .
- Zeigen Sie:

Seien  $L$  ein Gitter des  $\mathbb{R}^n$ , sowie  $v_1, \dots, v_n$  und  $w_1, \dots, w_n$  zwei Basen von  $L$ . Dann ist

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| = |\det(w_1, \dots, w_n)|$$

Die von der Wahl der Basis demnach unabhängige Größe  $|\det(v_1, \dots, v_n)|$  heißt *Determinante* von  $L$  (oder *Gitterdeterminante*, wenn der Bezug zu  $L$  klar ist).

- Seien  $v_1, \dots, v_n$  bzw.  $w_1, \dots, w_n$  Basen für Gitter  $L_v$  bzw.  $L_w$  des  $\mathbb{R}^n$  mit  $|\det(v_1, \dots, v_n)| = |\det(w_1, \dots, w_n)|$ . Gilt dann  $L_v = L_w$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden!

**Aufgabe 13.2 Hausaufgabe**

Betrachten Sie das diophantische Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}^4$$

Bestimmen Sie - analog zur Vorlesung - alle Vektoren  $b$ , für die das Gleichungssystem eine ganzzahlige Lösung  $x$  hat. Berechnen Sie für beliebiges (zulässiges), aber festes  $b$  die Menge  $\{x \in \mathbb{Z}^4 : Ax = b\}$ .