Optimierung 2, WS 2008/09

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt, Dr. M. Ritter

Übungsblatt 14

Aufgabe 14.1
Nach dem Beweis von Satz 7.1.33 aus der Vorlesung kann man die Berechnung der Hermite Normalform einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j\in[m]} \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ (mit $rg(A) = m$) so ergänzen, dass die bei der zeilenweisen Transformation benutzten Zwischenwerte stets $\leq \det(A)$ sind.

Konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m\times m}$, so dass – ohne diese Ergänzung – bei der Berechnung der Hermite Normalform von A Zahlen auftreten, die nicht in $O(\alpha^{m-2} \cdot \det(A))$ liegen, wobei $\alpha = \max\limits_{i,j\in[m]} |a_{ij}|$.

Aufgabe 14.2
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und m Kanten, sei $\mathcal{O} := \{U \subset V : |U| \equiv 1 \mod 2\}$ und für beliebiges $U \subset V$ sei $E(U) := \{e \in E : e \subset U\}$. Weiter sei

$$\mathcal{M}(G) := \operatorname{conv}\{x \in \{0,1\}^m : x \text{ ist charakterischer Vektor eines Matchings in } G\}$$

das *Matching-Polytop* von G. Sei $M(G) \subset \mathbb{R}^m$ das Polyeder, das durch folgendes Ungleichungssystem definiert ist:

$$\sum_{\substack{e\in E\\ v\in e}} x_e \leq 1 \quad \forall\, v \in V, \tag{1}$$

$$\sum_{e\in E(U)} x_e \leq \frac{|U|-1}{2} \quad \forall\, U \in \mathcal{O}, \tag{2}$$

$$x_e \geq 0 \quad \forall\, e \in E. \tag{3}$$

a) Zeigen Sie: Die Punkte in $\mathbb{Z}^m$, welche die Ungleichungen (1) und (3) erfüllen, sind genau die charakteristischen Vektoren von Matchings in G. Geben Sie einen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ an, der (1) und (3) erfüllt, nicht aber (2).

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(G) \subset M(G)$ ist (d.h. alle Inzidenzvektoren von Matchings in G erfüllen auch (2), die Ungleichung ist also *gültig* für die Inzidenzvektoren von Matchings) und folgern Sie, dass $\mathcal{M}(G) = \operatorname{conv}(M(G) \cap \mathbb{Z}^m)$.

c) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathcal{M}(G)$ sowie von $M(G)$.

d) Zeigen Sie: Falls für $U \in \mathcal{O}$ der von U induzierte Subgraph von G ein Kreis ist, so induziert die Ungleichung (2) eine Facette von $\mathcal{M}(G)$. Beweisen Sie die Behauptung zunächst für $|U| \in \{3, 5\}$ und skizzieren Sie dann den allgemeinen Beweis.

e) Zeigen Sie: Ist ein Subgraph (U, E_U) von G mit $U \in \mathcal{O}$ ein Kreis, der eine echte Teilmenge des von U induzierten Subgraphen ist, so induziert die Ungleichung $\sum_{e\in E_U} x_e \leq {}^1\!/_2(|U|-1)$ im Allgemeinen keine Facette von $\mathcal{M}(G)$.

Die Abgabe der mit *Hausaufgabe* gekennzeichneten Aufgaben erfolgt *vor* Beginn Ihrer Übung persönlich bei Ihrer Tutorin bzw. Ihrem Tutor.