Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Optimierung 2, WS 2008/09

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dipl.-Inf. Dipl.-Math. S. Borgwardt, Dr. M. Ritter

Übungsblatt 14

Aufgabe 14.1
Nach dem Beweis von Satz 7.1.33 aus der Vorlesung kann man die Berechnung der Hermite Normalform einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j\in[m]} \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ (mit $rg(A) = m$) so ergänzen, dass die bei der zeilenweisen Transformation benutzten Zwischenwerte stets $\leq \det(A)$ sind.

Konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m\times m}$, so dass – ohne diese Ergänzung – bei der Berechnung der Hermite Normalform von A Zahlen auftreten, die nicht in $O(\alpha^{m-2} \cdot \det(A))$ liegen, wobei $\alpha = \max\limits_{i,j\in[m]} |a_{ij}|$.

Lösung zu Aufgabe 14.1
Wir konstruieren ein Beispiel für eine solche Matrix wie folgt. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hierbei sei $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$ (das Element maximalen Betrags). Man beachte, dass die letzte Zeile keinen Eintrag α enthält.

Es gilt $\det(A) = 1$, was man z. B. durch Entwicklung nach der ersten Zeile leicht sieht.

Es bleibt daher zu zeigen, dass bei der Bestimmung der Hermite Normalform von A ein Eintrag einer Zwischenmatrix nicht in $O(\alpha^{m-2})$ ist. Die Berechnung läuft zeilenweise ab, (x) bezeichne im Folgenden die x-te Spalte der Matrix.

Um die erste Zeile in geeignete Form zu bringen, müssen wir $(m) := (m) - \alpha \cdot (1)$ nehmen. Dadurch taucht an Stelle $(2, m)$ der Eintrag $-\alpha^2$ auf. Analog wird der Eintrag $\pm\alpha^k$ an Stelle (k, m) im k-ten Schritt $(k \neq m)$ durch die Operation $(m) := (m) \mp \alpha^k \cdot (k)$ zu 0 gemacht, aber dabei durch die Lage der α-Einträge der Eintrag an Stelle $(k+1, m)$ zu $\mp\alpha^{k+1}$. Zwischen diesen zeilenweisen ggT-Schritten werden sonst nur die Einträge der entsprechenden Zeile links von der Diagonalen zu 0 gemacht, was aber die Werte in der letzten Spalte nicht beeinflusst.

In der letzten Zeile steht kein α mehr, so dass der 1-Eintrag an Stelle (m, m) unverändert bleibt. An Stelle $(m - 1, m)$ finden wir vor dem $(m - 1)$-ten Schritt den Eintrag $\pm\alpha^{m-1}$, was unsere Behauptung zeigt.

Aufgabe 14.2
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und m Kanten, sei $\mathcal{O} := \{U \subset V : |U| \equiv 1 \mod 2\}$ und für beliebiges $U \subset V$ sei $E(U) := \{e \in E : e \subset U\}$. Weiter sei

$$\mathcal{M}(G) := \operatorname{conv}\{x \in \{0,1\}^m : x \text{ ist charakterischer Vektor eines Matchings in } G\}$$

das *Matching-Polytop* von G. Sei $M(G) \subset \mathbb{R}^m$ das Polyeder, das durch folgendes Ungleichungssystem definiert ist:

$$\sum_{\substack{e \in E \\ v \in e}} x_e \leq 1 \quad \forall\, v \in V, \tag{1}$$

$$\sum_{e \in E(U)} x_e \leq \frac{|U| - 1}{2} \quad \forall\, U \in \mathcal{O}, \tag{2}$$

$$x_e \geq 0 \quad \forall\, e \in E. \tag{3}$$

a) Zeigen Sie: Die Punkte in $\mathbb{Z}^m$, welche die Ungleichungen (1) und (3) erfüllen, sind genau die charakteristischen Vektoren von Matchings in G. Geben Sie einen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ an, der (1) und (3) erfüllt, nicht aber (2).

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(G) \subset M(G)$ ist (d.h. alle Inzidenzvektoren von Matchings in G erfüllen auch (2), die Ungleichung ist also *gültig* für die Inzidenzvektoren von Matchings) und folgern Sie, dass $\mathcal{M}(G) = \operatorname{conv}(M(G) \cap \mathbb{Z}^m)$.

c) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathcal{M}(G)$ sowie von $M(G)$.

d) Zeigen Sie: Falls für $U \in \mathcal{O}$ der von U induzierte Subgraph von G ein Kreis ist, so induziert die Ungleichung (2) eine Facette von $\mathcal{M}(G)$. Beweisen Sie die Behauptung zunächst für $|U| \in \{3, 5\}$ und skizzieren Sie dann den allgemeinen Beweis.

e) Zeigen Sie: Ist ein Subgraph (U, E_U) von G mit $U \in \mathcal{O}$ ein Kreis, der eine echte Teilmenge des von U induzierten Subgraphen ist, so induziert die Ungleichung $\sum_{e \in E_U} x_e \leq 1/2(|U|-1)$ im Allgemeinen keine Facette von $\mathcal{M}(G)$.

Lösung zu Aufgabe 14.2

a) Sei $x \in \mathbb{Z}^m$ ein Vektor, der (1) und (3) erfüllt, dann folgt sofort $x \in \{0,1\}^m$. Wegen (1) gibt es für jedes $v \in V$ aber höchstens eine Kante $e \in E$ mit $x_e = 1$, also entspricht x, als Inzidenzvektor auf der Menge E interpretiert, einem Matching in G. Umgekehrt erfüllt jeder Inzidenzvektor auf der Menge E natürlich (3), und wenn er zu einem Matching gehört nach Definition auch (1).

   Für das geforderte Gegenbeispiel können wir etwa den K_3 betrachten. Dann erfüllt der Vektor $x = (1/2, 1/2, 1/2)^T$ die Ungleichungen (1) und (3), mit $U = V$ ist (2) aber verletzt.

b) Sei $x \in \{0,1\}^m$ ein zu einem Matching in G gehöriger Indzidenzvektor, und sei $U \in \mathcal{O}$. Dann enthält U eine ungerade Anzahl an Knoten, kann also maximal $\lfloor |U|/2 \rfloor = (|U|-1)/2$ Matchingkanten enthalten. Damit erfüllt x die Ungleichung (2). Also liegen alle Inzidenzvektoren von Matchings in $M(G)$, und damit gilt das natürlich auch für deren konvexe

Hülle (da $M(G)$ selbst konvex ist), es folgt $\mathcal{M}(G) \subset M(G)$. Wir wissen bereits, dass jeder ganzzahlige Punkt in $M(G)$ Inzidenzvektor eines Matchings ist, also in $\mathcal{M}(G)$ liegt, damit folgt $M(G) \cap \mathbb{Z} \subset \mathcal{M}$, was die geforderte Gleichung zeigt.

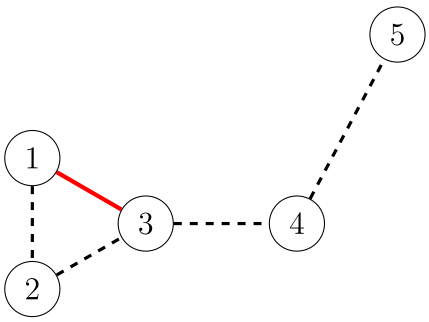
c) Die Vektoren $0, u_1, \dots, u_m$ sind sowohl in $M(G)$ als auch in $\mathcal{M}(G)$ enthalten und offenbar affin unabhängig. Damit beträgt die affine Dimension beider Polyeder mindestens m, und da beide Untermengen des $\mathbb{R}^m$ sind, kann die Dimension auch nicht größer sein. Beide Polyeder sind also volldimensional.

d) Sei $k := |U|$ (also insbesondere ungerade). Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $U = \{v_1, \dots, v_k\}$, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ und $E(U) = \{e_1, \dots, e_k\}$ (der induzierte Kreis enthält genauso viele Kanten wie Knoten) mit $e_1 = \{v_1, v_2\}, \dots, e_{k-1} = \{v_{k-1}, v_k\}, e_k = \{v_k, v_1\}$. Wir definieren für $j \in \{1, \dots, k\}$ die Kantenmenge

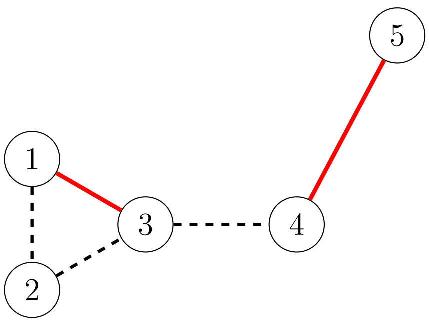
$$E_j := \{e \in E \setminus E(U) : e \cap v_j \neq \emptyset\},$$

sowie $E_0 := E(U)$ und $E_{k+1} := \{e \in E : e \cap U = \emptyset\}$. Da jede Kante in $E \setminus E(U)$ höchstens einen Endknoten in U hat, ist $E_0, E_1, \dots, E_k, E_{k+1}$ eine Partition der Kantenmenge E.

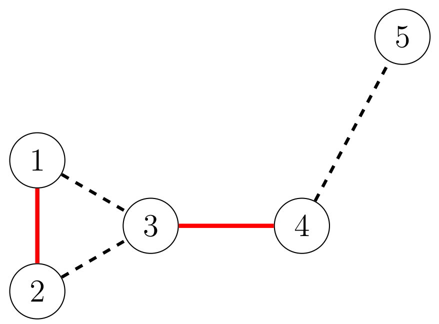
Wir skizzieren für den Fall $k = 3$ zunächst die Idee des Beweises: Es ist zu zeigen, dass $\sum_{e \in E(U)} x_e = 1/2(|U| - 1) = 1$ eine Facette von $\mathcal{M}(G)$ induziert. Die Zulässigkeit der entsprechenden Ungleichung wurde bereits gezeigt, wir müssen also noch beweisen, dass es m linear unabhängige Vektoren gibt, die diese Gleichung erfüllen und in $\mathcal{M}(G)$ liegen (damit wissen wir, dass die Gleichung eine $m-1$-dimensionale Seite induziert, also eine Facette). Die benötigten m Vektoren konstruieren wir als Inzidenzvektoren der folgenden Matchings, bei denen wir (um die Gleichung zu erfüllen) immer genau eine Kante im ungeraden Kreis als Matchingkante nehmen müssen:



Fall 1: Wähle genau eine Kante im ungeraden Kreis als Matchingkante aus, alle anderen Kanten sind Nichtmatchingkanten. Damit ist die Gleichung erfüllt.



Fall 2: Genau eine Kante im ungeraden Kreis wird für das Matching gewählt, zusätzlich wird eine Kante gewählt, die keinen Knoten mit dem Kreis gemeinsam hat.



Fall 3: Genau eine Kante außerhalb des Kreises wird gewählt, die aber einen Endknoten u mit dem Kreis gemeinsam hat. In dem Kreis der Länge 3 gibt es dann genau eine Kante, die nicht mit u inzident ist, diese wird ebenfalls für das Matching gewählt.

Die betrachteten m Inzidenzvektoren sind offenbar linear unabhängig (beachte die Position der 1-Einträge), damit haben wir wie gewünscht $m-1$ affin unabhängige Vektoren, die die gewünschte Gleichung (mit Gleichheit!) erfüllen. Formal: Wir betrachten die Vektoren

- u_e für alle $e \in E_0$
- $u_J + u_e$ mit $J := \{1,2,3\} \setminus \{j\}$, für alle $e \in E_j$ mit $1 \leq j \leq 3$
- $u_{e_1} + u_e$ für alle $e \in E_4$

Für $k = 5$ liegt der Fall ähnlich, hier müssen wir m affin unabhängige Inzidenzvektoren von Matchings finden, die $\sum_{e \in E(U)} x_e = 2$ erfüllen. Mit genau zwei Kanten in $E(U)$ haben wir dafür 5 verschiedene Möglichkeiten, die alle zu linear unabhängigen Vektoren führen. Zu einer Kante, die komplett außerhalb des Kreises liegt, können wir wieder eine beliebige dieser Zweierkombinationen hinzufügen, um ein passendes (unabhängiges) Matching zu erhalten. Nimmt man schließlich eine Kante, die mit dem Kreis genau einen Knoten u gemeinsam hat, so bleiben genau zwei Kanten im Kreis, die sich zusätzlich wählen lassen, ohne die Matching-Eigenschaft zu verletzen. Zusammen erhalten wir wieder m linear unabhängige Inzidenzvektoren, also induziert auch $\sum_{e \in E(U)} x_e = 2$ eine Facette. Formal wird das etwas komplizierter, wir betrachten nun die Vektoren

- $u_e + u_{e'}$ für $(e, e') \in \{(e_1, e_3), (e_2, e_4), (e_3, e_5), (e_4, e_1), (e_5, e_2)\}$
- $u_e + u_{e'} + u_{e''}$ für alle $e'' \in E_j$ mit $1 \leq j \leq 5$ und $(e, e') \in \{(e_1, e_3), (e_2, e_4), (e_3, e_5), (e_4, e_1), (e_5, e_2)\}$ so, dass $v_j \notin (e \cup e')$.
- $u_{e_1} + u_{e_3} + u_e$ für alle $e \in E_6$.

Es bleibt zu zeigen, dass alle Vektoren mit zwei Matchingkanten im Kreis linear unabhängig sind, also dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vollen Rang hat, was man leicht nachrechnen kann.

Das Argument lässt sich analog natürlich auf beliebig große induzierte Kreis ausdehnen, man muss dazu nur nachweisen, dass es immer k Stück Matchings gibt, die genau $1/2(k-1)$ Kanten im Kreis verwenden, dass die zugehörigen Inzidenzvektoren alle linear unabhängig sind, und dass für jede Kante, die mit dem Kreis genau einen Endkonten gemeinsam hat, immer eines dieser k Matchings gibt, das den entsprechenden Endknoten nicht überdeckt.

e) Wir betrachten den unten aufgezeichneten Graphen G mit $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und Subgraph (U, E_U), $E_U := \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}\}$. Wir zeigen, dass die Ungleichung $\sum_{e \in E_U} x_e = x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{51} \leq 2$ keine Facette des Matchingpolytops induziert.

Die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{23} + x_{31} &\leq 1 \\ x_{13} + x_{34} + x_{45} + x_{51} &\leq 2 \\ \sum_{e \in E_U} x_e = x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{51} &\leq 2 \end{aligned}$$

sind alle gültige Ungleichungen für das Matchingpolytop. Durch Addition erhält man daraus die ebenfalls gültige Ungleichung

$$2(x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{51} + x_{13}) \leq 5.$$

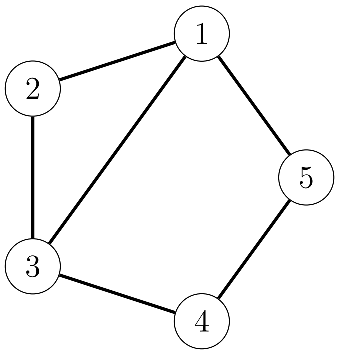
Weil die Ecken des Matchingpolytops $\mathcal{M}(G)$ ganzzahlig sind, kann man diese Ungleichung zu

$$x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{51} + x_{13} \leq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$$

verschärfen, also ist (etwas anders geschrieben)

$$\sum_{e \in E_U} x_e + x_{13} \leq 2$$

ebenfalls eine gültige Ungleichung für $\mathcal{M}(G)$. Diese Ungleichung dominiert aber die Ungleichung $\sum_{e \in E_U} x_e \leq 2$ (d. h. jeder für die obere Ungleichung zulässige Punkt ist auch für die untere Ungleichung zulässig, umgekehrt gibt es aber Punkte, die zwar für die untere, nicht aber für die obere Ungleichung zulässig sind), also kann letztere keine Facette sein.



Übrigens: Man kann mit etwas mehr Aufwand sogar beweisen, dass das Ungleichungssystem (1), (2), (3) eine komplette Beschreibung des Matchingpolytops $\mathcal{M}(G)$ ist. Dazu wäre noch zu zeigen, dass tatsächlich alle Facetten von $\mathcal{M}(G)$ durch eine dieser Ungleichungen induziert werden. Damit hat man dann die Aussage $M(G) = \mathcal{M}(G)$, also eine komplette $\mathcal{H}$-Darstellung des Matchingpolytops. Diese Aussage ist als *Satz von Edmonds* bekannt.