Propädeutikum Diskrete Mathematik

Prof. Dr. A. Taraz, Dipl-Math. A. Würfl, Dipl-Math. S. König

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1
Untersuchen Sie die folgenden Relationen bezüglich Reflexivität, Symmetrie und Transitivität und geben Sie im Falle von Äquivalenzrelationen eine möglichst einfache Beschreibung der Äquivalenzklassen an. Wir schreiben dabei stets abkürzend $x \sim y$ für $(x, y) \in R_i$, $i = 1, 2, 3$.

a) $R_1 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \sim y :\Leftrightarrow x - y = 5$,

b) $R_2 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \sim y :\Leftrightarrow 4x + y$ ist durch 5 teilbar,

c) $R_3 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$.

Aufgabe 2.2
Sei $M := \{1, \dots, n\}$.

a) Wie viele verschiedene Relationen $R \subseteq M \times M$ gibt es?

b) Wie viele davon sind Funktionen?
(Eine Relation $f \subseteq M \times M$ heißt Funktion, falls zu jedem $x \in M$ ein $y \in M$ existiert, so dass $(x, y) \in f$, und falls für alle $x, y_1, y_2 \in M$ gilt: $(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.)

Aufgabe 2.3
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $(a_0, a_1, \dots, a_{mn})$ eine Folge von paarweise verschiedenen reellen Zahlen. Zeigen Sie:

$(a_0, a_1, \dots, a_{mn})$ enthält eine monoton steigende Teilfolge der Länge $m+1$ oder eine monoton fallende Teilfolge der Länge $n+1$.

Aufgabe 2.4
Zeigen Sie die folgende Aussage mittels vollständiger Induktion.
Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt:

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$$

Aufgabe 2.5
Für $j \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $t(j)$ die Anzahl der Teiler von j. Beispielsweise ist $t(16) = 5$, da 16 die Teiler $1, 2, 4, 8$ und 16 hat. Weiter bezeichnen wir für $n \in \mathbb{N}$ mit $\bar{t}(n) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} t(j)$ die durchschnittliche Anzahl von Teilern der Zahlen $1, \dots, n$. Zeigen Sie:

$$\bar{t}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor .$$

Aufgabe 2.6

a) 30 Studierende und 5 Tutoren sollen sich in eine Reihe stellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn keine zwei Tutoren nebeneinander stehen sollen?

b) Sie möchten die vier Wände eines quadratischen Zimmers streichen, jede einzelne Wand in einer Farbe. Hierzu stehen Ihnen fünf verschiedene Farben zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Zimmer farblich zu gestalten, wenn man annimmt, dass die Wände unterscheidbar sind (d.h. die Kombinationen „rot-grün-blau-gelb“ und „grün-blau-gelb-rot“ sollen unterscheidbar sein), falls

   (i) vier verschiedene Farben verwendet werden sollen.

   (ii) die Farben gegenüberliegender Wände gleich sein soll.

   (iii) zwei der fünf Farben nicht verwendet werden sollen.

c) Auf wie viele Arten kann ein König auf einem 8×8-Schachbrett von der linken unteren Ecke in die rechte obere Ecke ziehen, wenn er dabei pro Zug entweder ein Feld nach rechts, ein Feld nach oben oder ein Feld (diagonal) nach rechts-oben ziehen darf?

Abgabe: bis Dienstag, 12.15 im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Bitte notieren Sie auf ihrer Abgabe:

- **Name(n), Vorname(n),**
- **Matrikelnummer(n) und**
- **Rückgabeübungsgruppe (Nummer laut Homepage, Wochentag, Uhrzeit und Übungsleiter).**

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.