Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Propädeutikum Diskrete Mathematik

Prof. Dr. A. Taraz, Dipl-Math. A. Würfl, Dipl-Math. S. König

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1
Gegeben seien n unterscheidbare Bälle und k ununterscheidbare Körbe. Zeigen Sie, dass es

a) $\sum_{i=1}^{k} S_{n,i}$ beliebige Zuordnungen

b) genau eine injektive Zuordnung (für $n \leq k$)

c) $S_{n,k}$ surjektive Zuordnungen (für $n \geq k$)

d) genau eine bijektive Zuordnungen (für $n = k$)

der Bälle auf die Körbe gibt.

Aufgabe 3.2
Gegeben seien n ununterscheidbare Bälle und k ununterscheidbare Körbe. Wie viele verschiedene

a) beliebige Zuordnungen

b) injektive Zuordnungen (für $n \leq k$)

c) surjektive Zuordnungen (für $n \geq k$)

d) bijektive Zuordnungen (für $n = k$)

der Bälle auf die Körbe gibt es?

Aufgabe 3.3
Wie viele k-elementige Teilmengen von $[n]$ gibt es, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten?

Hinweis: Sei $\{a_1, \ldots, a_k\}$ so eine Teilmenge, $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Ordnen Sie dieser Teilmenge die Menge $\{a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, \ldots, a_k - (k-1)\}$ zu.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.4

Sei $T_{n,k}$ die Anzahl der geordneten k-Partitionen einer n-elementigen Menge, also

$$T_{n,k} := \left|\{(M_1, \ldots, M_k) : M_1 \dot\cup \ldots \dot\cup M_k = [n], \forall i \in [k] : M_i \neq \emptyset\}\right| .$$

a) Finden Sie einen Zusammenhang zwischen $T_{n,k}$ und $S_{n,k}$.

b) Zeigen Sie $T_{n,k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} (k-r)^n$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, welche Abbildungen von $[n]$ nach $[k]$ durch $T_{n,k}$ gezählt werden und verwenden Sie (in geeigneter Form) die Mengen A_i aller Abbildungen von $[n]$ nach $[k]$, bei denen $i \in [k]$ kein Urbild besitzt.

c) Zeigen Sie $S_{n,k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{(k-r)^n}{r!(k-r)!}$.

Aufgabe 3.5

a) Für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in [n]$ seien A_i Mengen, und $X = \bigcup_{i \in [n]} A_i$ deren Vereinigung. Sei weiter $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$ für $\emptyset \neq I \subseteq [n]$. Beweisen Sie die Formel für Inklusion – Exklusion aus der Vorlesung, nämlich

$$|X| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} |A_I|.$$

Hinweis: Keine Induktion; bestimmen Sie stattdessen, in wie vielen Summanden der rechten Seite ein $x \in X$ gezählt wird.

b) Die Eulersche $\varphi-$Funktion ist so definiert, dass $\varphi(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ angibt, wie viele Zahlen in $[n]$ zu n teilerfremd sind. Verwenden Sie Inklusion – Exklusion, um folgende Aussage über die Eulersche $\varphi-$Funktion zu zeigen:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_t}\right)$$

Dabei sind die p_i gerade die Primteiler von n.

Abgabe: bis Dienstag, 12.15 im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Bitte notieren Sie auf ihrer Abgabe:

- **Name(n), Vorname(n),**
- **Rückgabeübungsgruppe (Nummer laut Homepage, Wochentag, Uhrzeit und Übungsleiter).**

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.