



Propädeutikum Diskrete Mathematik

Prof. Dr. A. Taraz, Dipl-Math. A. Würfl, Dipl-Math. S. König

Übungsblatt 4

Definitionen:

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- a) G heißt *kreisfrei* (oder *Wald*), wenn G keinen Kreis als Subgraphen enthält.
- b) G heißt *zusammenhängend*, wenn es zu jedem Paar von Knoten $x, y \in V$ einen x, y -Weg als Subgraphen in G gibt.
- c) Ein inklusionsmaximaler zusammenhängender Subgraph H von G heißt *Zusammenhangskomponente* von G .
- d) Wenn G kreisfrei und zusammenhängend ist, dann nennt man G einen *Baum*.

Aufgabe 4.1

Zeigen Sie: Für beliebige Graphen $G = (V, E)$ gilt:

- a) Ist $|V| \geq 2$, so hat G zwei Knoten gleichen Grades.
- b) Ist G kreisfrei, so ist der Minimalgrad $\delta(G) \leq 1$.
- c) Besitzt G einen Minimalgrad $\delta(G) \geq 2$, so enthält G einen Kreis der Länge $l \geq \delta(G) + 1$.
- d) G ist zusammenhängend oder $\bar{G} := (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ ist zusammenhängend.
- e) Ist $|V| \geq 6$, dann ist $\max\{\alpha(G), \omega(G)\} \geq 3$.

Aufgabe 4.2

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Graphen $G = (V, E)$:

- (1) G ist zusammenhängend.
- (2) Für jede Partition $V = X \dot{\cup} Y$ mit $X, Y \neq \emptyset$ existiert eine Kante $\{x, y\} \in E$ mit $x \in X$ und $y \in Y$.
- (3) Es existiert ein Baum $H = (V, F)$ als Subgraph von G .

Aufgabe 4.3

Zeigen Sie:

- a) Die Zusammenhangskomponenten eines Waldes sind Bäume.
- b) Jeder Baum G mit mindestens zwei Knoten hat mindestens zwei Blätter.
- c) Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für $v \in V$ bezeichne $V' := V \setminus \{v\}$ und $E' := \{e \in E : v \notin e\}$ und $G - v := (V', E')$ den um den Knoten v reduzierten Graphen. Wenn G ein Baum und b ein Blatt in G ist, dann ist $G - b$ ein Baum.

Aufgabe 4.4

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $n := |V|, m := |E|$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (1) G ist ein Baum.
- (2) G ist zusammenhängend und $m = n - 1$.
- (3) G ist kreisfrei und $m = n - 1$.
- (4) Zwischen je zwei Knoten $x, y \in V$ existiert genau ein x, y -Weg in G .

Hinweis: Beweisen Sie (1) \Rightarrow (2) mittels vollständiger Induktion und benutzen Sie Aufgabe 4.3.

Hinweise zum Übungsbetrieb und zur Vorlesung in der Zeit vom 21.12.2009 bis 10.1.2010:

- Für die Zeit vom 21.12.2009 bis 10.1.2010 gibt es ein Weihnachtsblatt. Die Aufgaben auf diesem Blatt werden nicht korrigiert, stattdessen stellen wir eine Musterlösung auf der Homepage bereit.
- In diesem Zeitraum finden auch keine regulären Übungen statt. Stattdessen steht Ihnen Ihr Tutor zum Termin Ihrer regulären Übung für Fragen (zum Weihnachtsblatt) zur Verfügung.
- In der Woche vom 11.1.2009 werden die Übungen normal mit Blatt 5 fortgesetzt. (Ungerade Gruppen starten also in der Woche vom 11.1. ins neue Jahr, die geraden Gruppen in der Woche vom 18.1.)
- Die Vorlesung am Mittwoch, den 23.12. kann evtl. auf Dienstag, den 22.12. 18:00 Uhr verschoben werden. Näheres dazu erfahren Sie in der Vorlesung.