Prof. Dr. A. Taraz, Dipl-Math. A. Würfl, Dipl-Math. S. König

Übungsblatt 5

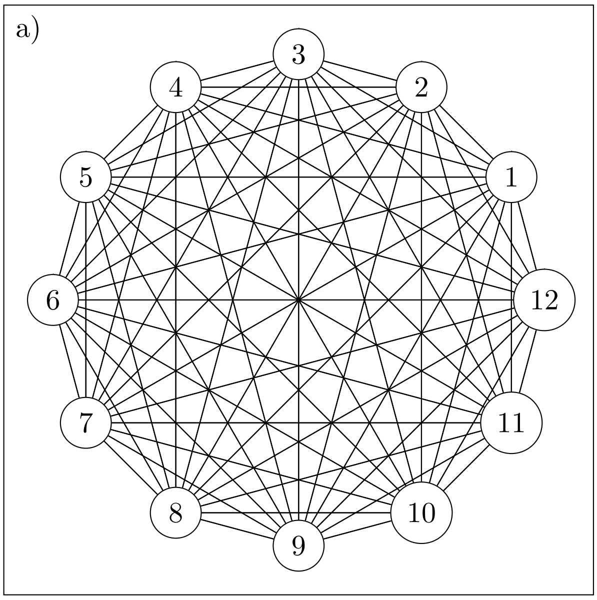
Aufgabe 5.1

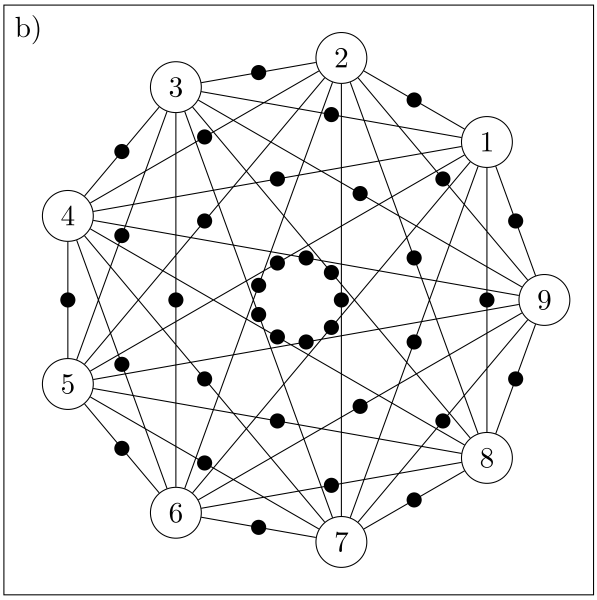
a) Gegeben sei der vollständige Graph $K_{12} = (V, E)$ auf $V = \{1, \ldots, 12\}$ mit Kantengewichten $w : E \to \mathbb{N}$ mit

$$w(\{i,j\}) := \begin{cases} 1, & \text{falls } i + j \equiv 0 \mod 2, \\ 2, & \text{falls } i + j \equiv 1 \mod 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie einen bezüglich w minimalen aufspannenden Baum in diesem Graphen und beweisen Sie, dass Ihre Lösung tatsächlich minimal ist.

b) Gegeben sei der Graph G, der aus K_9 entsteht, indem man auf jeder Kante des K_9 einen Knoten einfügt. Finden Sie ein größtes Matching in G und beweisen Sie, dass es tatsächlich kein größeres Matching gibt.





Aufgabe 5.2
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie: Sind M ein maximales Matching und M^* ein größtes Matching in G so gilt $2|M| \geq |M^*|$.

Aufgabe 5.3
Es seien $G = (V, E)$ ein Graph und M, M' zwei Matchings in G. Zeigen Sie, dass gilt: Wenn $|M'| \geq |M| + k$, so gibt es mindestens k knotendisjunkte M-augmentierende Pfade in G.

Aufgabe 5.4

Zwei Spieler P_1 und P_2 wählen jeweils abwechselnd Knoten des Graphen G. Der gewählte Knoten muss jeweils ein Nachbar des im vorherigen Zug vom Gegenspieler gewählten Knoten sein. Ein Knoten kann maximal einmal gewählt werden. Spieler P_1 darf mit einem beliebigen Knoten beginnen. Das Spiel endet, wenn einer der Spieler keinen Knoten mehr wählen kann. Der Spieler, der als letzter einen Knoten wählen konnte, gewinnt.

Frage: Unter welchen Voraussetzungen kann Spieler P_i, $i \in \{1, 2\}$ das Spiel immer für sich entscheiden, und wie muss P_i dann Knoten wählen, um auf jeden Fall zu gewinnen?

Aufgabe 5.5

Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ein *Kantenzug* in G ist eine Folge $(v_0, \ldots, v_k)$ von Knoten $v_i \in V$, so dass $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für alle $i \in [k]$. Man sagt, dass der Kantenzug die Kante $\{v_{i-1}, v_i\}$ *benutzt*. (Beachte: ein Kantenzug kann Knoten mehrfach durchlaufen und Kanten mehrfach benutzen.) Ein Kantenzug heißt *geschlossen*, wenn $v_0 = v_k$ ist. Eine *Euler–Tour* von G ist ein geschlossener Kantenzug in G, der jede Kante aus E genau einmal benutzt.

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) Es gibt eine Eulertour in G.

(2) Jeder Knoten in G hat geraden Grad.

(3) E lässt sich in kantendisjunkte Kreise partitionieren.

Abgabe: bis Dienstag, 12.15 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Bitte notieren Sie auf ihrer Abgabe:

- **Name(n), Vorname(n),**
- **Rückgabeübungsgruppe (Nummer laut Homepage, Wochentag, Uhrzeit und Übungsleiter).**

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.