Propädeutikum Diskrete Mathematik

Prof. Dr. A. Taraz, Dipl-Math. A. Würfl, Dipl-Math. S. König

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1
Zeigen Sie, für $k \geq 3$ gilt:[1]

a) Ist $G = (V, E)$ ein Graph mit $\chi(G) = k$ und ist $f : V \to [k]$ eine k-Färbung von G, dann gibt es für jedes $c \in [k]$ einen Knoten $v \in V$, sodass $f(v) = c$ und $f(N(v)) = [k] \setminus \{c\}$.

b) Es existiert ein Graph G_k mit $\omega(G_k) = 2$ und $\chi(G_k) \geq k$. Konstruieren Sie die Graphen G_k hierfür rekursiv, sodass der neue Graph den alten Graphen als Subgraphen enthält.

Hinweis: Wie lässt sich das Ergebnis aus Teil a) verwenden, um eine bestimmte Farbe für einen (neuen) Knoten zu erzwingen?

Aufgabe 6.2
Sei X eine beliebige Menge mit n Elementen, $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X und

$$P := \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\}.$$

a) Zeigen Sie, dass P eine partielle Ordnung ist und bestimmen Sie die maximale Anzahl von Elementen in einer Kette bzw. Antikette von P (letztere vorerst ohne Beweis).

b) Sei $\mathcal{A} := \{A_1, \ldots, A_\ell\}$ eine Antikette in $P = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Wir bezeichnen mit a_k die Anzahl der Teilmengen in $\mathcal{A}$, die genau Kardinalität k haben.
Beweisen Sie die LYM-Ungleichung:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Hinweis: Zählen Sie dazu, wie viele Möglichkeiten es für ein A_i gibt, die Elemente von X so anzuordnen, dass zuerst die Elemente aus A_i erscheinen. Vergleichen Sie dies mit der Anzahl möglicher Anordnungen für die Elemente von X.

c) Beweisen Sie unter Verwendung der LYM-Ungleichung, dass für jede Antikette $\mathcal{A}$ in P gilt:

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

[1] Die Aussagen gelten natürlich auch für $k = 1, 2$

Aufgabe 6.3
Gegeben sei die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die durch

$$b_0 := 2 \text{ und } b_{n+1} := 3b_n + 4^n$$

definiert ist. Finden Sie eine explizite Formel für b_n.

Gehen Sie wie folgt vor:

a) Setzen Sie $B(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ und zeigen Sie

$$B(x) = \frac{2}{1-3x} + \frac{x}{(1-4x)(1-3x)}$$

b) Benutzen Sie den Ansatz

$$\frac{x}{(1-4x)(1-3x)} = \frac{\alpha}{1-4x} + \frac{\beta}{1-3x}$$

und bestimmen Sie geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (*Partialbruchzerlegung*)

c) Leiten Sie mithilfe der Formel für die geometrische Reihe daraus die Formel für b_n ab.

Aufgabe 6.4
Gegeben sei die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die durch

$$d_0 := 1 \text{ und } d_{n+1} := 2d_n + n$$

definiert ist. Finden Sie eine explizite Formel für d_n mithilfe einer erzeugenden Funktion.

Hinweis: Eine Partialbruchzerlegung zu

$$\frac{1}{(a-bx)(c-dx)^2}$$

hat die Form

$$\frac{\alpha}{a-bx} + \frac{\beta}{c-dx} + \frac{\gamma}{(c-dx)^2}.$$

Abgabe für alle Gruppen: bis Dienstag, 09. Februar, 12.15 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss. Die korrigierten Aufgaben können im Wiederholungskurs oder direkt am Lehrstuhl abgeholt werden.

Bitte notieren Sie auf ihrer Abgabe:

- **Name(n), Vorname(n),**
- **Rückgabeübungsgruppe (Nummer laut Homepage, Wochentag, Uhrzeit und Übungsleiter).**

Bitte geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.