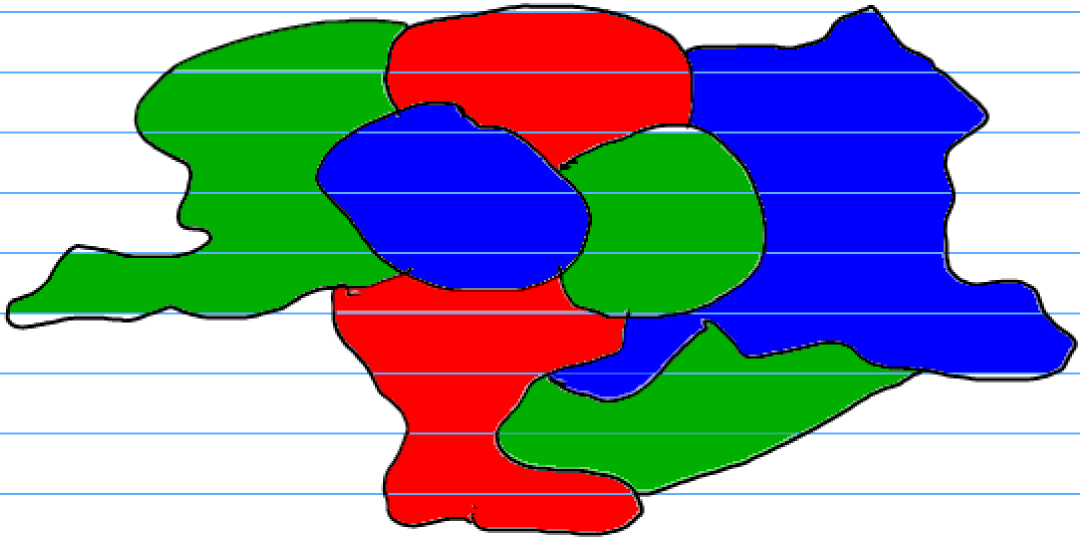
Propädeutikum Diskrete Mathematik

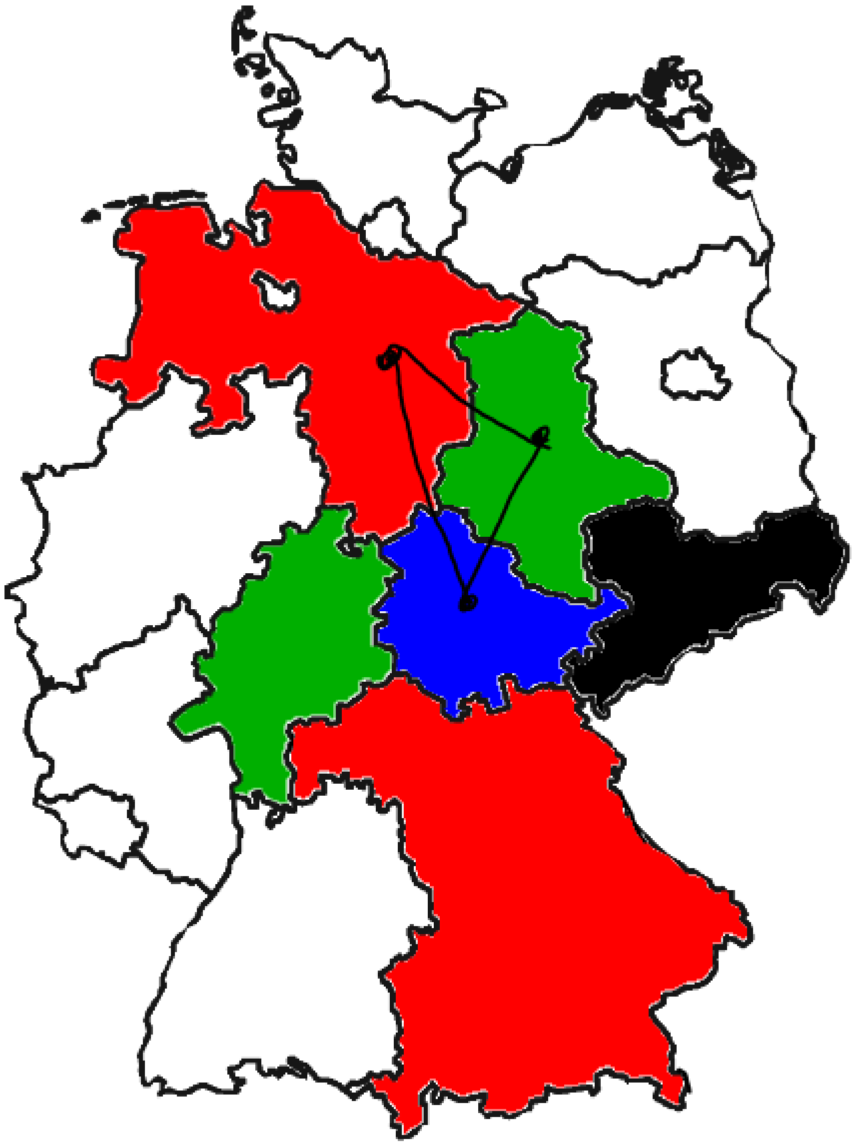
Anusch Taraz

0. Beispiele

0.1 Landkarten färben

Ziel: benachbarte Länder NICHT die gleiche Farbe, möglichst wenig Farben





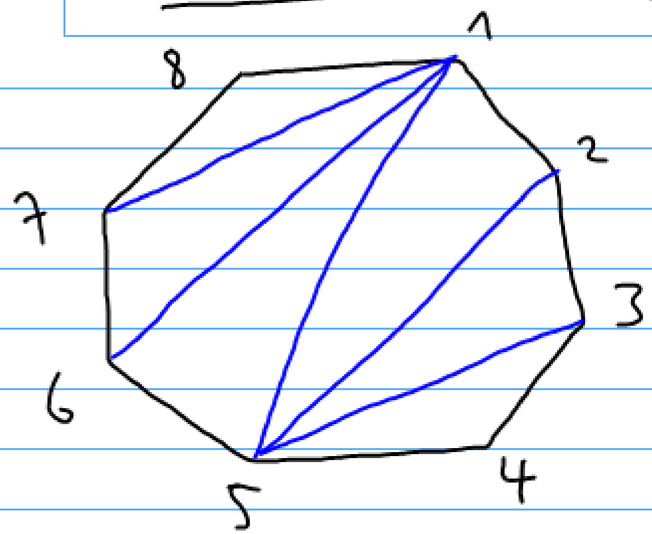
Frage (~ 1850):

Reichen 4 Farben für jede Landkarte?

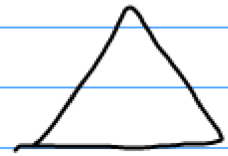
Antwort (~ 1970):

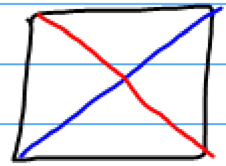
ja

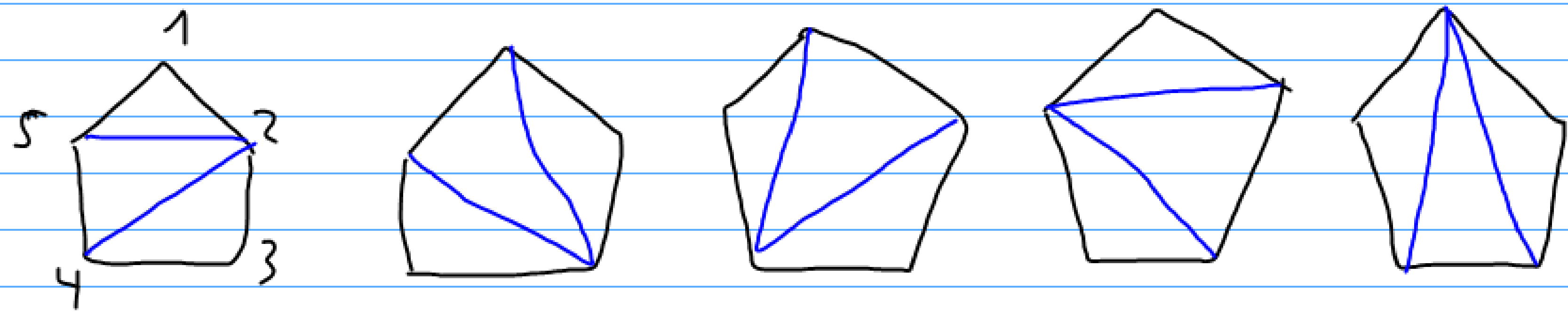
0.2 Triangulierungen zählen



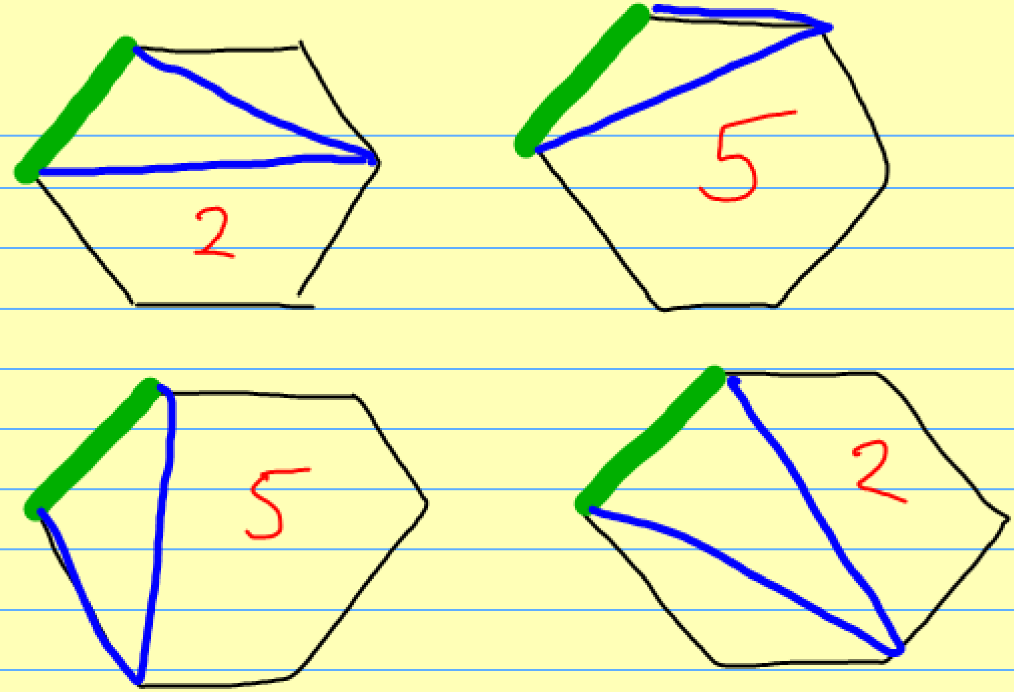
Wieviele?

3:  $\longrightarrow$ 1

4:  $\longrightarrow$ 2

5: 

$\longrightarrow$ 5

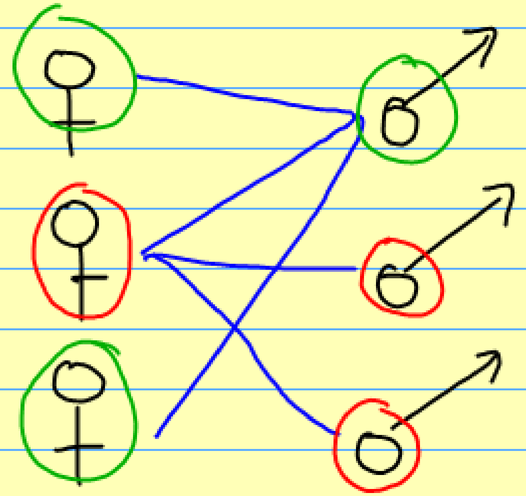


$\longrightarrow 14$

$$n \longrightarrow \frac{(2n-4)\cdot(2n-5)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}{(n-1)\cdot(n-2)^2\cdot(n-3)^2\cdot \ldots \cdot 2^2\cdot 1^2}$$

$$5 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 5$$

0.3 Matchings



Problem:

je k Frauen müssen zusammen mindestens k Männer mögen, sonst klappt's nicht.

notwendig:

hinreichend? ja Heiratssatz von Hall.

Vorlesungsübersicht

I. Grundlagen

II. Zählen

III. Relationale Strukturen

Organisation

I. Grundlagen

1. Mengen

1.1 Def:

$$M = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$$

Elemente, $36 \in M$, $37 \notin M$

M = alle Quadratzahlen zwischen 1 und 81

Abkürzungen:

$\exists$ = „es existiert"

$\forall$ = „für alle"

$:$ = „für die gilt"

$$\boxed{\mathbb{N} := \{1,2,3,4,\dots\} \qquad \mathbb{N}_0 := \{0,1,2,\dots\}}$$

$$\mathbb{Z} := \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$$

$$\mathbb{Q} := \{ z : \exists x \in \mathbb{Z} \ \exists y \in \mathbb{N} \text{ mit } z = \tfrac{x}{y} \}$$

$\mathbb{R} :=$ „reelle Zahlen"

Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann $[n] := \{x \in \mathbb{N} : 1 \le x \le n\}$.

Wenn $x \in \mathbb{R}$, dann $\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} : x \le n\}$.

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$$

Bsp: $[3] = \{1,2,3\}$ $\qquad \lceil 3{,}14 \rceil = 4$

$\lfloor -5.8 \rfloor = -6$ $\qquad M = \{x^2 : x \in [9]\}$.

Mengenoperationen

$M_1 = M_2 :\Leftrightarrow$ M_1 und M_2 enthalten die gleichen Elemente

$|M|$

$M = \emptyset$

$M_1 \cup M_2$

$M_1 \cap M_2$

$M_1 \setminus M_2$

$M_1 \subset M_2 :\Leftrightarrow \forall x \in M_1$ gilt: $x \in M_2$

„Teilmenge"

insbesondere wenn $M_1 = M_2$ oder $M_1 = \emptyset$

Def

$x := 3$

$x = y$

Aussage

Mengen $M_1, \dots, M_k$

$$\bigcup_{i=1}^{k} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$$

$$\bigcap_{i=1}^{k} M_i := M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k$$

disjunkt

Wenn $M = \boxed{\bigcup_{i=1}^{k} M_i}$ und $M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \in [k]$,

dann heißt ↑ Partition von M,

schreibe $M = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} M_i = M_1 \dot\cup M_2 \dot\cup \dots \dot\cup M_k$

Bsp: $G := \{ n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2k \}$ $\Rightarrow \mathbb{Z} = G \dot\cup U$.
$U := \{ n \in \mathbb{Z} : \quad n = 2k+1 \}$

Summen und Produkte

$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i := a_1 + \ldots + a_k$$

$$\prod_{i=1}^{k} a_i := a_1 \cdot \ldots \cdot a_k$$

Bsp. 1.2

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5$$

$$\prod_{i=2}^{10} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{10} = \frac{1}{10}$$

2. Vollständige Induktion

Bsp 2.1 unendliche Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$

- gegeben durch $a_0 := 2$

und $a_n := 3 \cdot a_{n-1} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- also $a_1 = 3 \cdot a_0 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$

$a_2 = 3 \cdot a_1 + 1 = 3 \cdot 7 + 1 = 22$

- **BEH:** $\boxed{a_n = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 3^n - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0}$

Induktionsanfang:

$n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 3^0 - 1) = \frac{1}{2}(4) = 2 \checkmark$$

geg: $a_n = 3a_{n-1} + 1$

Induktionsannahme: $\boxed{a_k = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^k - 1)}$.

Induktionsschritt: $n = k+1$.

$$a_{k+1} = 3 \cdot a_k + 1 \quad \text{(nach Def.)}$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{2}(5 \cdot 3^k - 1)\right) + 1 \quad \text{(nach J.A.)}$$

$$= \frac{1}{2}(5 \cdot 3^{k+1} - 3) + 1$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}(5 \cdot 3^{k+1} - 1)}$$

qed.