VL 28.10.09

I. Grundlagen

1. Mengen 2. Vollständige Induktion

Def 2.2 Sei $k \in \mathbb{N}$ und $M_1, \dots, M_k$ Mengen.

$M_1 \times \dots \times M_k := \{ (x_1, \dots, x_k) : x_i \in M_i \ \forall i \in [k] \}$

ist das kartesische Produkt der Mengen $M_1, \dots, M_k$.

$M^k := \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{k}$. Elemente von $M_1 \times \dots \times M_k$

heißen k-Tupel, $(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_k)$ gdw

$x_i = y_i \ \forall i \in [k]$.

$\binom{M}{k} := \{ S : S \subset M, |S| = k \}$ ist die Familie aller k-elem. Teilmengen von M.

$\mathcal{P}(M) := \{ S : S \subset M \}$ heißt Potenzmenge von M.

Bsp 2.3 $\mathbb{R}^2$, $\binom{\mathbb{R}}{2}$

$(7,7) \in \mathbb{R}^2$, $(7,8) \neq (8,7) \in \mathbb{R}^2$

$\{7,7\} = \{7\} \notin \binom{\mathbb{R}}{2}$ $\{7,8\} = \{8,7\} \in \binom{\mathbb{R}}{2}$

$\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

Prop 2.4 Sei M eine Menge mit $|M| = \ell \in \mathbb{N}_0$.

Dann: a) $\mathcal{P}(M) = \dot{\bigcup}_{k=0}^{\ell} \binom{M}{k}$

b) $|\mathcal{P}(M)| = 2^\ell$.

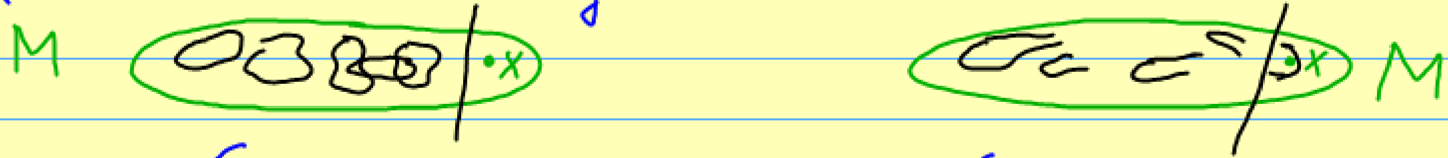
Bew: a) Klar nach Definition

b) Bew durch vollst. Ind. $\boxed{|\mathcal{P}(M)| = 2^{\ell}}$

$\ell = 0$: $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$ ✓

Angenommen, die Aussage stimmt für $\ell = n$, wir wollen sie jetzt für $\ell = n+1$ zeigen.

Sei M eine bel. Menge mit $|M| = n+1$ Elemente. Wähle $x \in M$ beliebig aus. Betrachte $M \setminus \{x\}$.



$$\mathcal{P}(M) = \{S : S \subset M \text{ und } x \notin S\} \,\dot\cup\, \{S : S \subset M \text{ und } x \in S\}$$
$$= \{S : S \subset M \setminus \{x\}\} \,\dot\cup\, \{S' \cup \{x\} : S' \subset M \setminus \{x\}\}$$
$$= \{S \in \mathcal{P}(M \setminus \{x\})\} \,\dot\cup\, \{S' \cup \{x\} : S' \in \mathcal{P}(M \setminus \{x\})\}$$

Da $|M \setminus \{x\}| = n$ wissen wir nach Ind. ann., dass $|\mathcal{P}(M \setminus \{x\})| = 2^n$. Also: $|\mathcal{P}(M)| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

qed.

Bem 2.5

a) Ind. anfang: immer für die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, für die die Aussage behauptet wird.

b) Ind. schritt $n \to n+1$: man kann sich auch auf die Korrektheit der Aussage für $1, \dots, n$ berufen.

c) Wenn man sich im Ind. schritt auf die Korrektheit von $n-1$ und n beruft, dann muss man den Induktionsanfang auch bei den ZWEI kleinsten Zahlen machen.

3. Relationen und Funktionen

3.1 Def M Menge. Eine (binäre) Relation $R \subset M \times M$ heißt
- reflexiv $:\Leftrightarrow \forall a \in M : (a,a) \in R$
- symmetrisch $:\Leftrightarrow \forall a,b \in M : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
- transitiv $:\Leftrightarrow \forall a,b,c \in M : (a,b) \in R, (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$.

Eine Relation mit allen Eigenschaften heißt Äquivalenzrelation.

$[a]_R := \{ b \in M : (a,b) \in R \}$ heißt Äquivalenzklasse von a.

3.2 Bsp $R := \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \exists n_a, n_b \in \mathbb{Z} \ \exists r \in \{0,1,2\}$ mit $a = 3 \cdot n_a + r$ und $b = 3 \cdot n_b + r \}$

also $(5,8) \in R$, denn $5 = 3 \cdot 1 + 2$ und $8 = 3 \cdot 2 + 2$

oder $(-5,1) \in R$, denn $-5 = 3 \cdot (-2) + 1$ und $1 = 3 \cdot 0 + 1$

HA: R ist Äquivalenzrelation

$[0]_R = \{ \dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots \} = [9]_R = [102]_R = \dots$

$[1]_R = \{ \dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots \}$

$[2]_R = \{ \dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots \}$

3.3 Satz Sei $M \neq \emptyset$ und R Äquivalenzrelation über M, $a, b \in M$ bel. Dann gilt:

(i) $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \iff$ (ii) $[a]_R = [b]_R \iff$ (iii) $(a,b) \in R$

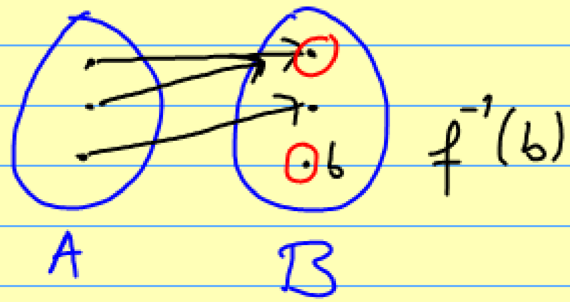
Bew: (i) $\Rightarrow$ (iii) Sei $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Dann $(a,c) \in R$ und $(b,c) \in R$, wg Symm. $(c,b) \in R$, wg Trans. $(a,b) \in R$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sei $c \in [a]_R$ bel. Dann $(a,c) \in R$. Wg (iii) $(a,b) \in R$, wg Symm $(b,a) \in R$, wg Trans. $(b,c) \in R$, also $c \in [b]_R$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wg Refl. ist $(a,a) \in R$, also $a \in [a]_R \overset{(ii)}{=} [b]_R$, also $a \in [a]_R \cap [b]_R$.

qed.

Funktionen: $f : A \longrightarrow B$



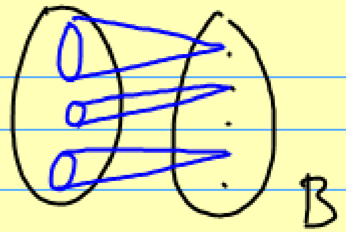
inj $:\iff |f^{-1}(b)| \leq 1 \quad \forall b \in B$

surj $:\iff |f^{-1}(b)| \geq 1 \quad$ "

bij $:\iff |f^{-1}(b)| = 1 \quad$ "

Prop 3.4 Für jede Funktion $f: A \to B$ gilt

$$A = \dot{\bigcup_{b \in B}} f^{-1}(b)$$



Bew: Klar, denn jedem Element $a \in A$ wird ein $b \in B$ durch f zugeordnet, also $A = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$.

Wäre $f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b') \neq \emptyset$, dann gäbe es $a \in A$ mit $f(a) = b$ und $f(a) = b'$.

qed.

Lemma 3.5 $A, B \neq \emptyset$ endliche Mengen, $f: A \longrightarrow B$ Funktion. Dann:

a) Wenn f bijektiv, dann $|A| = |B|$.

b) Wenn $|A| = |B|$, dann

f inj. $\Leftrightarrow$ f surj. $\Leftrightarrow$ f bij.

Bew:

a) Nach 3.4 $|A| = \sum_{b\in B} |f^{-1}(b)|$.

Wenn f bij., dann $|f^{-1}(b)| = 1$, also $|A| = \sum_{b \in B} 1 = |B|$.

b) Wiede nach 3.4: $|B| = |A| = \sum_{b\in B} |f^{-1}(b)|$. (*)

Wenn f inj., dann sind alle Summanden ≤ 1,
wegen (*) also alle $= 1$, also f bij.

Wenn f surj., dann sind alle Summanden ≥ 1,
wegen (*) also alle $= 1$, also f bij.

D.h: f inj $\Rightarrow$ f bij. $\Leftarrow$ f surj

qed.