VL 3, 4.11.09

Lemma 3.5: $f: A \to B$ bijektiv, A, B endlich
$\Rightarrow |A| = |B|$

Nachtrag 3.6:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$$\downarrow \quad f(n) := (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\}$$

DEF: Wenn $\exists f: \mathbb{N} \to M$, f surjektiv, dann heißt M abzählbar.

also: $\mathbb{Z}$ abzählbar, $\mathbb{Q}$ abzählbar, $\mathbb{R}$ nicht! abzählbar.

Prop 3.7 (Schubfachprinzip)

a) Seien N und M Mengen (endlich) und $f: N \to M$ eine bel. Fkt. Dann ex. $S \subset N$ mit $|S| \geq \left\lceil \frac{|N|}{|M|} \right\rceil$ und $y \in M$ mit

$$f(x) = y \quad \forall x \in S.$$

b) Wenn die Elemente einer unendlichen Menge mit endlich vielen Farben gefärbt werden, dann existiert eine unendliche, einfarbige Teilmenge.

Bew: Klar

Bsp 3.8 $a, b \in \mathbb{N}$: $a|b \;\hat{=}$ „a ist Teiler von b", $n \in \mathbb{N}$

$\forall a, b \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\} \subset [2n]$: $a \nmid b$ und $b \nmid a$.

Beh: $\forall N \subset [2n]$ mit $|N| \geq n+1$: $\exists a, b \in N$ mit $a|b$.

Bew: $f : [2n] \longrightarrow \{1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1\}$.

mit $f(x) := y$ wenn $x = 2^k \cdot y$, $k \in \mathbb{N}_0$, $2 \nmid y$.

also $f(2) = f(2^1 \cdot 1) = 1$, $f(3) = f(2^0 \cdot 3) = 3$

$f(60) = f(2^2 \cdot 15) = 15$

Betrachte $f : N \subset [2n] \longrightarrow M := \{1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1\}$, $|N| \geq n+1$

$3.7 \Rightarrow \exists S \subset N$ mit $|S| \geq \left\lceil \frac{|N|}{|M|} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n+1}{n} \right\rceil = 2$,

also $\exists x \neq x'$ mit $f(x) = f(x') =: y$,

also $x = 2^k \cdot y$ und $x' = 2^{k'} \cdot y$, also $x | x'$ oder $x' | x$.

II. Zählen

4. Elementares Zählen

Prop 4.1 (Summenregel)

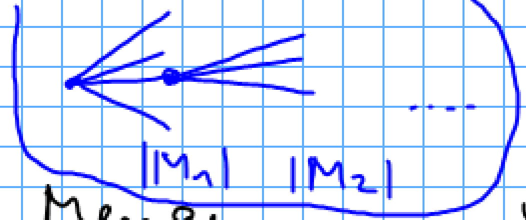
Wenn $M_1, \dots, M_k$ endliche Mengen und $M = M_1 \dot\cup \dots \dot\cup M_k$

dann $|M| = \sum_{i=1}^{k} |M_i|$.

Prop 4.2 (Produktregel)

Wenn $M_1, \dots, M_k$ endliche Mengen und $M = M_1 \times \dots \times M_k$,

dann $|M| = \prod_{i=1}^{k} |M_i|$.



Prop 4.3 (Zählen durch Bijektion)

Wenn A und B endliche Mengen und $f: A \to B$ bijektiv, dann $|A| = |B|$.

Bew: $\hat{=}$ 3.5 a).

~~Bsp~~

Bsp 4.4 $M := \{m_1, \dots, m_n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

gesucht: Bijektion $f: \mathcal{P}(M) \longrightarrow \{0,1\}^n$

betrachte $S \subset M$ $\quad f(S) := \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}$ mit $x_i := \begin{cases} 0 & m_i \notin S \\ 1 & m_i \in S \end{cases}$

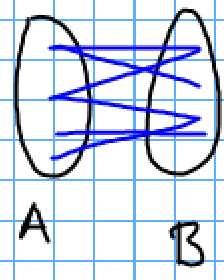
heißt charakteristischer Vektor von S

Bsp im Bsp: $M := \{2,3,5\}, \quad S := \{2,5\}$

$\Rightarrow \quad f(S) = (1,0,1)$

$$\Rightarrow \quad |\mathcal{P}(M)| \overset{4.3}{=} |\{0,1\}^n| = |\{0,1\}|^n = 2^n.$$

Prop 4.5 (Doppeltes Abzählen)

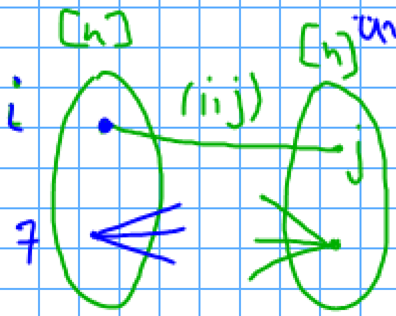


Sei $R \subset A \times B$ binäre Relation. Dann

$$\sum_{a\in A} \left|\{b\in B : (a,b)\in R\}\right| = |R| = \sum_{b\in B} \left|\{a\in A : (a,b)\in R\}\right|.$$

Bew: wg. $\dot{\bigcup}_{a\in A} \{(a,b)\in R : b\in B\} = R = \dot{\bigcup}_{b\in B} \{(a,b)\in R : a\in A\}$ und Summenregel.

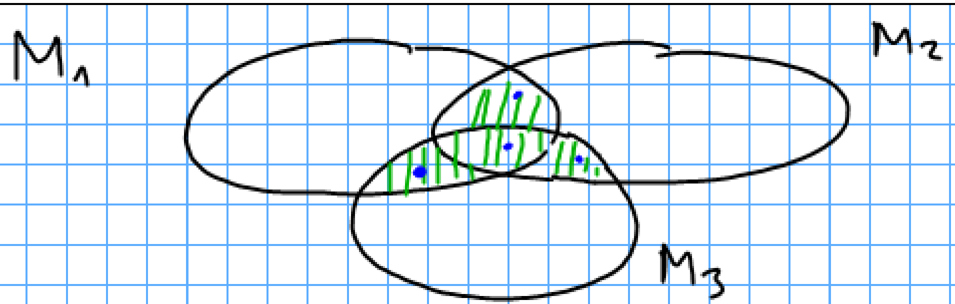
Bsp 4.6



Def: $(i,j)\in R \;:\Leftrightarrow\; i \mid j$ „teilt"

durchschnittl. Anzahl Teiler $= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left|\{i : (i,j)\in R\}\right| = ?$

$$\left|\{j : (i,j)\in R\}\right| = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$



$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| .$$

Satz 4.6 Für endliche Mengen $M_1, \dots, M_n$ gilt:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{i_1=1}^{n} |M_{i_1}| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |M_{i_1} \cap M_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap M_{i_3}| - \dots \pm |M_1 \cap \dots \cap M_n| .$$

$$= \dots$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \underbrace{\sum_{I \in \binom{[n]}{r}}} \left| \bigcap_{j \in I} M_j \right|$$

<u>Bew:</u> evtl. später

<u>Bsp:</u> $n = 3$

$r = 1$: $(-1)^{1-1} \underbrace{\sum_{\{i_1\} \subset [3]}} \left| \bigcap_{j \in \{i_1\}} M_j \right| = |M_1| + |M_2| + |M_3|$

$r = 2$: $(-1)^{2-1} \sum_{\{i_1, i_2\} \subset [3]} \left| \bigcap_{j \in \{i_1, i_2\}} M_j \right| = -|M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3|$

$r = 3$: $(-1)^{3-1} \sum_{\{i_1, i_2, i_3\} \subset [3]} \left| \bigcap_{j \in \{i_1, i_2, i_3\}} M_j \right| = |M_1 \cap M_2 \cap M_3|$.

5. Teilmengen zählen

Motivation: „6 aus 49"

Satz 5.1 Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und M Menge mit $|M| = n$.

a) [geordnet, mit Zurücklegen]
Für $M^k = \{(c_1, \dots, c_k) : c_i \in M \ \forall i \in [k]\}$ gilt
$n^k = |M^k|$.

b) [geordnet, ohne Zurücklegen] Sei $k \leq n$. Für
$M^{\underline{k}} := \{(c_1, \dots, c_k) : c_i \in M \ \forall i \in [k], \ c_i \neq c_j \ \forall i \neq j \in [k]\}$
gilt: $n^{\underline{k}} := \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k} = |M^{\underline{k}}|$

Bem: $x \longmapsto x^{\underline{k}}$ für $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ heißt fallende (k-) Faktorielle von x.

$n! := n^{\underline{n}} := n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ heißt n Fakultät.

Vereinbarung: $n^{\underline{0}} := 1$, insb $0! := 1$.

c) [ungeordnet, ohne Zurücklegen] Sei $k \le n$.

Für $\binom{M}{k} = \left\{ \{c_1, \dots, c_k\} : \begin{array}{ll} c_i \in M & \forall i \in [k] \\ c_i \neq c_j & \forall i \neq j \in [k] \end{array} \right\}$

gilt $\binom{n}{k} := \dfrac{n^{\underline{k}}}{k!} = \left| \binom{M}{k} \right|$.

<u>Bew:</u> folgt

<u>Lemma 5.2</u> Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \le n$. Dann

a) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ und $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

c) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ für $n, k \ge 1$ und $k \le n-1$.