Wdh. 5.1 $n,k \in \mathbb{N}$, Menge M mit $|M| = n$ VL 4, 11.11.09

a) $M^k := \{(c_1, \dots, c_k) : c_i \in M \ \forall i \in [k]\}$

$|M^k| = n^k$

b) $M^{\underline{k}} := \{(c_1, \dots, c_k) : c_i \in M \ \forall i \in [k] \text{ und } c_i \neq c_j \ \forall i \neq j \in [k]\}$

$|M^{\underline{k}}| = n^{\underline{k}} := n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

c) $\binom{M}{k} := \{\{c_1, \dots, c_k\} : c_i \in M \ \forall i \in [k] \text{ und } c_i \neq c_j \ \forall i \neq j \in [k]\}$

$\left|\binom{M}{k}\right| = \binom{n}{k} := \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$

L 5.2 c) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \boxed{\binom{2}{1}} & + & \boxed{\binom{2}{2}} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \boxed{\binom{3}{2}} & & \binom{3}{3}
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & \boxed{2} & & \boxed{1} & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

Bew von 5.1 a) Produktregel

b) Induktion über k. $k=1$ $\quad |M^{\underline{1}}| = |M| = n$. ✓

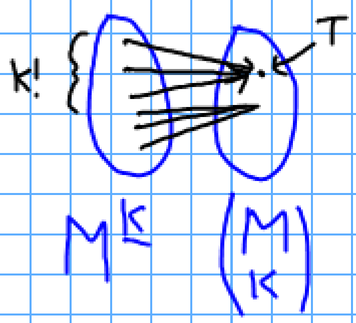
$$M^{\underline{k}} = \dot{\bigcup_{x\in M}} \left\{ (x, \underline{c_2, c_3, \dots, c_k}) : (c_2,\dots,c_k) \in (M\setminus\{x\})^{\underline{k-1}} \right\}$$

Summenregel $\Rightarrow$

$$|M^{\underline{k}}| = \sum_{x\in M} \left| (M\setminus\{x\})^{\underline{k-1}} \right| \overset{\text{Ind.}}{=} n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot((n-1)-(k-1)+1)$$
$$= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

c) intuitiv: wie b), aber jede k-TM hat $k!$ Möglichkeiten angeordnet zu werden.

formal: $f: M^{\underline{k}} \longrightarrow \binom{M}{k}$, $\quad f:(c_1,\dots,c_k) \longmapsto \{c_1,\dots,c_k\}$



Es gilt: $\left| f^{-1}(\{c_1,\dots,c_k\}) \right| = k^{\underline{k}} = k!$

$$\Rightarrow n^{\underline{k}} = |M^{\underline{k}}| \overset{3.4}{=} \sum_{T\in\binom{M}{k}} |f^{-1}(T)| = \left|\binom{M}{k}\right| \cdot k!$$

$$\Rightarrow \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \left|\binom{M}{k}\right|.$$

qed

Lemma 5.3 $m, n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $k \leq m$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

vgl. $n=2$: $$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^0 y^{2-0} + \binom{2}{1} x^1 y^{2-1} + \binom{2}{2} x^2 y^{2-2} = y^2 + 2xy + x^2.$$

b) $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

c) $$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

d) $$x^{\underline{n+k}} = x^{\underline{n}} (x-n)^{\underline{k}}$$

e) $$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{\underline{i}} y^{\underline{n-i}}$$

f) $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

„Kombinatorischer Beweis" für b):

$$\dot{\bigcup_{i=0}^{n}} \binom{[n]}{i} = \mathcal{P}([n])$$

Bew: a) Induktion über n.

b) Setze $x := y := 1$ in a): $$\underline{\underline{2^n}} = (1+1)^n \overset{a)}{=} \underline{\underline{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}}} \cancel{1^i} \cancel{1^{n-i}}.$$

c) Setze $x := -1$ und $y := 1$ in a).

d) $$x^{\underline{n}} \cdot (x-n)^{\underline{k}} = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n+1) \cdot (x-n) \cdot \ldots \cdot (x-n-k+1)$$
$$= x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-(n+k)+1)$$
$$= x^{\underline{n+k}} .$$

e) Induktion über n, wie a).

f) $$\sum_{i=0}^{k} \underbrace{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}_{\text{k-elem. Menschenmengen mit i Frauen und k-i Männern}} = \binom{n+m}{k}$$

n Frauen, m Männer

k-elem. Menschenmengen

k-elem. Menschenmengen mit i Frauen und k−i Männern

qed.

ungeordnet, mit Zurücklegen

Tupel? nein, weil ungeordnet. Menge? nein, weil Zurücklegen

Bsp.: $M = \{a, b, c, d, e\}$

$\{c, a, b, a, c, c, e\} = \{a, a, b, c, c, c, e\} \neq \{a, b, c, e\}$

Def 5.4 Eine Multimenge ist ein Paar (M, φ), wobei M eine Menge und $\varphi: M \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion ist, so dass $\forall x \in M: \varphi(x) =$ „wie oft ist x in der Menge enthalten".

Bsp: $M = \{a, b, c, d, e\}$

$\varphi(a) = 2, \quad \varphi(b) = 1, \quad \varphi(c) = 3, \quad \varphi(d) = 0, \quad \varphi(e) = 1$

Satz 5.5 Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und M Menge mit $|M| = n$.

$$\left\langle \begin{matrix} M \\ k \end{matrix} \right\rangle := \left\{ (M, \varphi) : \varphi(M) \to \mathbb{N}_0 \text{ mit } \sum_{x \in M} \varphi(x) = k \right\}$$

heißt die <u>Menge der k-elementigen Multimengen</u> über M,

es gibt $\left| \left\langle \begin{matrix} M \\ k \end{matrix} \right\rangle \right| = \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle := \binom{n+k-1}{k}$.

Bew: Kodiere $\underbrace{\{a, a, b, c, c, c, e\}}$ durch $\underbrace{**|*|***||*}_{n+k-1}$.

Formal: Sei $M = \{m_1, \dots, m_n\}$.

$Y :=$ Folgen der Länge $\underline{n-1+k}$ mit genau k mal $*$ und $n-1$ mal $|$.

$$f : \left\langle \begin{matrix} M \\ k \end{matrix} \right\rangle \longrightarrow Y \qquad f((M, \varphi)) := \underbrace{* \dots *}_{\varphi(m_1)} | \underbrace{* \dots *}_{\varphi(m_2)} | \dots | \underbrace{* \dots *}_{\varphi(m_n)}$$

f bijektiv.

$\Rightarrow \left| \left\langle \begin{matrix} M \\ k \end{matrix} \right\rangle \right| = |Y| =$ Wähle die k Positionen für die $*$ aus den $n+k-1$ Pos. aus $= \binom{n+k-1}{k}$.

Def 5.6 $k, n \in \mathbb{N}_0$, M Menge mit $|M| = n$.

Eine <u>k-Partition</u> von M ist eine Partition von M in k nicht-leere Mengen: $M = M_1 \dot\cup M_2 \dot\cup \ldots \dot\cup M_k$, $M_i \neq \emptyset \ \forall i \in [k]$.

$S_{n,k} :=$ Anzahl k-Partitionen einer n-elem. Menge.

Setze $S_{0,0} := 1$.

Bsp: $M = \{1,2,3\} = \{1,2\} \cup \{3\} = \{1,3\} \cup \{2\} = \{2,3\} \cup \{1\}$.

$n=3$
$k=2$ also $S_{3,2} = 3$.

Satz 5.7 Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$.

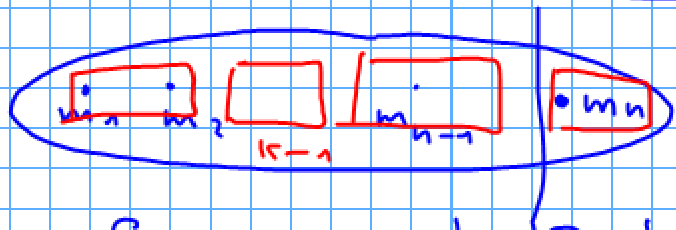
a) Für $k > n$ gilt: $S_{n,k} = 0$

b) Für $n \geq 1$ gilt: $S_{n,0} = 0$

c) Für $1 \leq k \leq n$ gilt: $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$.

<u>Bew:</u> a), b) klar.

c) $M = \{m_1, \dots, m_n\}$. z.z: $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$.



Es gibt genau $S_{n-1,k-1}$ k-Partitionen, in denen eine Partitionsklasse aus genau m_n besteht.

In allen k-Partitionen gilt, dass m_n NICHT alleine in einer Partitionsklasse liegt. Bilde also zunächst k Partitionsklassen aus $m_1, \dots, m_{n-1}$ ($S_{n-1,k}$ Mögl.), und wähle dann aus, zu welcher Klasse wir m_n dazu stecken (k Möglichkeiten).

$$\Rightarrow S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}.$$

q.e.d.