VL 5, 18.11.09

5.6: $S_{n,k}$ = Anzahl $k$-Partitionen einer $n$-elem. Menge

5.7: $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$

Kor. 5.8: Für $1 \le k \le n$ gilt

$$S_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i \, (k-i)^n}{i! \, (k-i)!}$$

Bew: - mit Induktion
- oder kombinatorisch.

Bem: $S_{n,k}$ heißt Stirling-Zahl zweiter Art.

$$[4] = \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,3\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3\} \cup \{4\} =$$
$$4 = 2 + 2 = 2 + 2 = 3 + 1$$

**DEF 5.9** $k, n \in \mathbb{N}_0$. Eine k-Partition der Zahl n ist eine Zerlegung von n in k Summanden: $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ mit $n_i \in \mathbb{N}$ $\forall i \in [k]$. Bei geordneter Partition kommt es auf die Reihenfolge an, bei ungeordneter Partition nicht. Die Anzahl der ungeordneten Partitionen von n bezeichnet man mit $P_{n,k}$, setze $P_{0,0} := 1$.

Bsp: $n=4$, $k=2$: $4 = 2+2 = 1+3$, also 2 ung. 2-Partitionen

$4 = 2+2 = 1+3 = 3+1$, also 3 geord. 2-P.

**Satz 5.10** Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$.

a) Für $k > n$ gilt $P_{n,k} = 0$.

b) Für $n \geq 1$ gilt $P_{n,0} = 0$.

c) Für $1 \le k \le n$ gilt: $P_{n+k,k} = \sum_{i=0}^{k-1} p_{n,k-i}$.

d) Für $1 \le k \le n$ gilt: Es gibt genau $\binom{n-1}{k-1}$ geordnete $k$-Partitionen der Zahl $n$.

Bew: a), b) Klar. c) „Einser" := Summand, der gleich 1 ist.

$0 \le$ Anzahl Einser in $k$-Partition von $n+k$ $\le k-1$.

Sei $0 \le i \le k-1$ und

$X_i$ := Menge der ung. $k$-Partitionen der Zahl $n+k$ mit genau $i$ Einsern.

$Y_i$ := Menge der ung. $(k-i)$-Partitionen der Zahl $n$.

Beh: $|X_i| = |Y_i|$. (Dann wären wir fertig.)

Gebe Bijektion von $X_i$ nach $Y_i$ an:

$$n+k = \boxed{\underbrace{1+\ldots+1}_{i} + \underbrace{n_{i+1} + n_{i+2} + \ldots + n_k}_{k-i \text{ Summanden } \geq 2}} \in X_i$$

Dann ist

$$\boxed{n'_{i+1} := n_{i+1} - 1, \ldots, n'_k := n_k - 1} \in Y_i.$$

wegen

$$n'_{i+1} + \ldots + n'_k = n+k - i - (k-i) = n$$

und

$$n'_j \geq 1 \quad \forall\ i+1 \leq j \leq k$$ eine $(k-i)$-Partition von $n$

Die Abb. $1, \ldots, 1, n_{i+1}, \ldots, n_k \longmapsto n'_{i+1}, \ldots, n'_k$

ist bijektiv, weil wir zu jedem $n'_{i+1}, \ldots, n'_k$ (aus $Y_i$) durch Addition von 1 und Hinzufügen von $i$ Einsern genau ein Urbild in $X_i$ erhalten.

d) <u>z.z:</u> Anzahl geord. $k$-Partitionen von $= \binom{n-1}{k-1}$.

$$n = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1.$$

$n-1$ Pluszeichen.

Eine geordnete $k$-Partition von $n$ entspricht jetzt der Auswahl von $k-1$ Pluszeichen, so dass

$$n = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n_1} + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n_2} + \dots + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n_k}.$$

Es gibt genau $\binom{n-1}{k-1}$ viele Auswahlmöglichkeiten.

<u>qed.</u>

Partitionen $\hat{=}$ n Bälle auf k Körbe verteilen.

a) Bälle unterscheidbar, Körbe unterscheidbar:

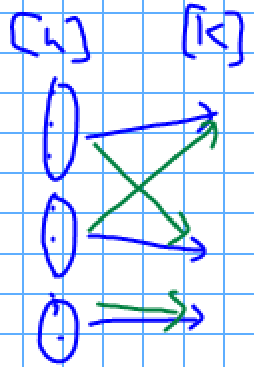
$\rightarrow$ Funktion : $[n] \longrightarrow [k]$. Wieviele?

<u>allg.</u>: $f = (f(1), f(2), \ldots, f(n)) \in [k]^n$, also $k^n$ viele.

<u>inj</u>: $f \in [k]^{\underline{n}}$, also $k^{\underline{n}}$ viele, wenn $n \leq k$.

<u>bij</u>: geht nur wenn $n = k$, dann inj $\Rightarrow$ surj, also $n^{\underline{n}} = n!$ viele.

<u>surj</u>: geht nur wenn $n \geq k$.



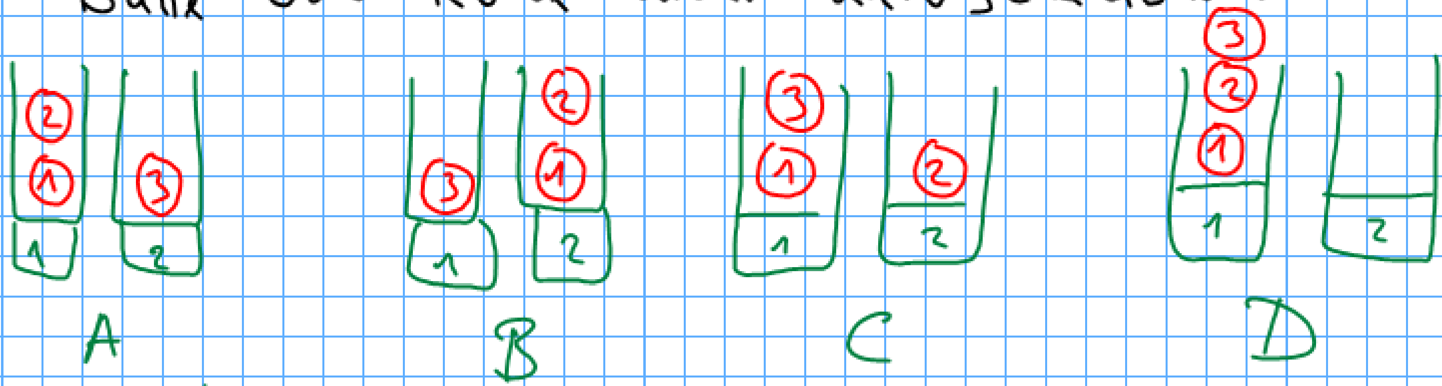

Hatten in 3.4 gesehen, dass $\forall f: [n] \longrightarrow [k]$

$[n] = \dot{\bigcup}_{y \in [k]} f^{-1}(y)$. Wenn $f$ surj, dann $f^{-1}(y) \neq \emptyset$,

also ist das eine k-Partition von $[n]$. Davon gibt es $S_{n,k}$ viele. Für jede k-Partition von $[n]$ gibt es dann noch $k!$ Möglichkeiten, die k Partitionsklassen den k Körben zuzuordnen. $\rightarrow$ $k!\, S_{n,k}$.

Wenn Bälle oder Körbe nicht unterscheidbar?

Bsp:



Bälle nicht unt.b.,
Körbe untb. $\Rightarrow A \neq B, \; A = C$

Bälle unt.b.,
Körbe nicht untb. $\Rightarrow A = B, \; A \neq C$

Bälle nicht untb.,
Körbe nicht untb. $\Rightarrow A = B = C \neq D$.

**Satz 5.11** Verteile $n$ Bälle auf $k$ Körbe.

Die Anzahl der möglichen Verteilungen ist gegeben durch

| | bel. | inj. $n \leq k$ | surj. $n \geq k$ | bij. $n = k$ |
|---|---|---|---|---|
| a) Bälle unterscheidbar, Körbe unterscheidbar. | $k^n$ | $k^{\underline{n}}$ | $k!\, S_{n,k}$ | $n!$ |
| b) Bälle nicht unterscheidbar, Körbe unterscheidbar. | $\binom{n+k-1}{n}$ | $\binom{k}{n}$ | $\binom{n-1}{k-1}$ | $1$ |
| c) Bälle unterscheidbar, Körbe nicht unterscheidbar. | $\sum_{i=1}^{k} S_{n,i}$ | $1$ | $S_{n,k}$ | $1$ |
| d) Bälle nicht unterscheidbar, Körbe nicht unterscheidbar. | ? | ? | ? | ? |

**Bew:** a) $\hat{=}$ Funktionen, siehe Vorrede.

b) Bälle nicht unterscheidbar, Körbe unterscheidbar $\hat{=}$ Wahlausgänge, eine bel. Ballverteilung kann durch eine sortierte Auflistung der getroffenen Korbnummern dargestellt werden:

z.B. $\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2, \ldots, k, \ldots, k}_{n \text{ Bälle}}$. (mit Zurücklegen, ungeord.)

also eine $n$-elementige Multimenge über $[k]$, davon gibt es nach 5.5 genau $\binom{n+k-1}{n}$ viele.

inj: nur interessant, ob ein Korb (genau einmal) getroffen wird oder nicht, wähle also $n$ aus $k$ $\longrightarrow \binom{k}{n}$.

surj: entspricht einer $k$-Partition der Zahl $n$, nach 5.10 d) gibt es davon $\binom{n-1}{k-1}$ viele.

bij: je ein Ball pro Korb $\longrightarrow$ $1$.

c) und d) HA.

**Bsp 5.12** $\quad |A| = n$

$\mathcal{S} := \{ f : A \to A,\ f \text{ bijektiv} \}$ (Permutationen)

$|\mathcal{S}| = n!$

Wenn $\forall x \in A: \ f(x) \neq x$, dann heißt $f$ fixpunktfrei.

$\mathcal{D} := \{ f \in \mathcal{S} : f \text{ fixpunktfrei} \}$ (Derangements).

$|\mathcal{D}| = ?$

**Def:** $x \in A \qquad \mathcal{F}_x := \{ f \in \mathcal{S} : f(x) = x \}$.

$\Rightarrow \quad \mathcal{D} = \mathcal{S} \setminus \bigcup_{x \in A} \mathcal{F}_x$. $\qquad$ aber: $\mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y \neq \emptyset$

Inklusion/Exklusion (4.6)

$$\Rightarrow \left| \bigcup_{x \in A} \mathcal{F}_x \right| = \sum_{r=1}^{n} \left( (-1)^{r-1} \sum_{I \in \binom{A}{r}} \left| \bigcap_{x \in I} \mathcal{F}_x \right| \right)$$

$= \{ f \in \mathcal{S} : f(x) = x \ \ \forall x \in I \}$

$$\left|\bigcap_{x\in I} \mathfrak{F}_x\right| = \left|\left\{ f : A\setminus I \xrightarrow[\text{bij}]{} A\setminus I \right\}\right| = (n-|I|)!$$
$$= (n-r)!$$

$$\Rightarrow \left|\bigcup_{x\in A} \mathfrak{F}_x\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} (n-r)!$$
$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{n!}{r!} .$$