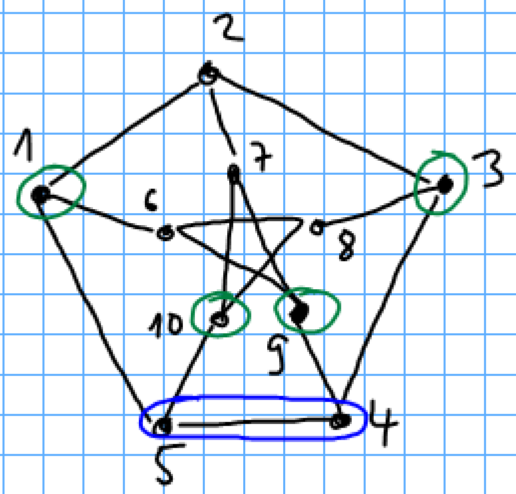
VL 23.12. → Di, 22.12. 17:15 HS 1

VL 7, 09.12.09

Wdh:

$G = (V, E)$



Petersen-Graph.

$N(1) = \{2, 5, 6\}$

$\deg(1) = 3$

$\delta(G) = \Delta(G) = 3$

$\Rightarrow |E| = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15$

$\omega(G) = 2$, $\alpha(G) = 4$

$G[\{5, 10, 7, 2\}] \cong P_3$

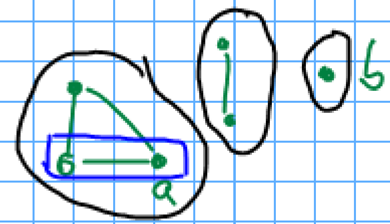
$G[\{6, 7, 8, 9, 10\}] \cong C_5$

G enthält keinen Kreis der Länge 3 oder 4 als Subgraph!

Def 6.8 (Kreisfrei, zshgd, Baum) $G=(V,E)$ sei Graph.

a) G heißt <u>Kreisfrei</u> (Wald), wenn G keinen Kreis als Subgraphen enthält.

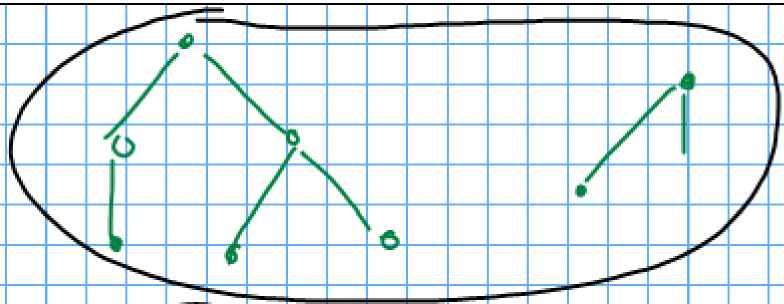
b) G heißt <u>zusammenhängend</u>, wenn es zu jedem Paar von Knoten $x,y \in V$ einen x,y-Weg als Subgraphen in G gibt.



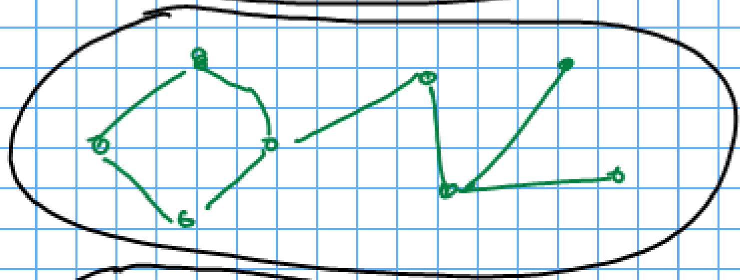
c) Wenn $H \subset G$, H zshgd, und für alle $H' \subset G$ mit $H \subset H'$, $H \neq H'$, gilt, dass H' nicht zshgd, dann heißt H Zshgskomp. von G.

d) Wenn G Kreisfrei und zshgd, dann heißt G <u>Baum</u>.

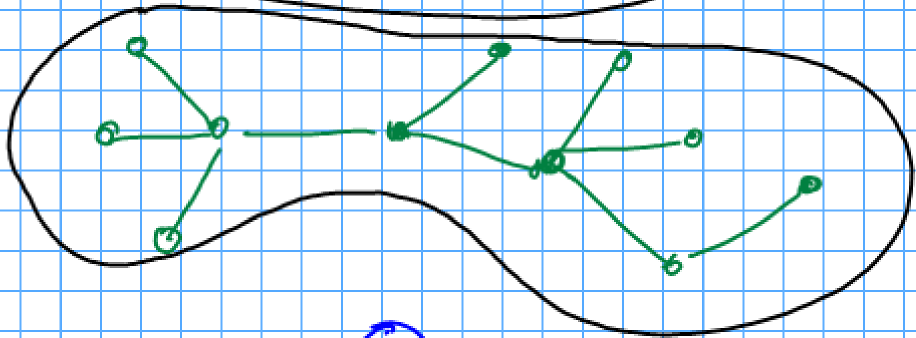
Bsp:



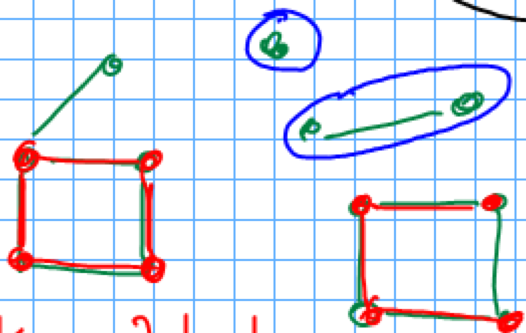
kreisfrei, aber nicht zshgd.



nicht kreisfrei, aber zshgd



Baum.



Zshg Komp.

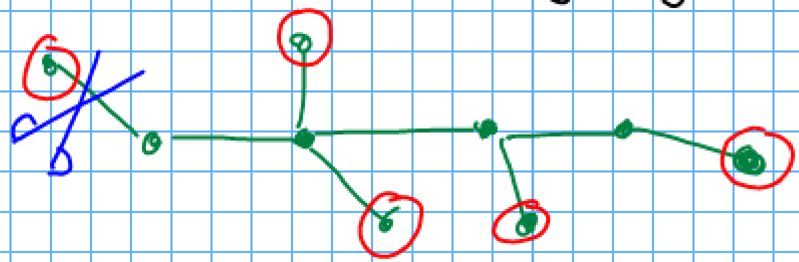
Keine Zshg Komp.

Lemma 6.9

a) Jeder Baum mit mindestens zwei Knoten hat mindestens zwei Blätter (d.h. Knoten vom Grad $= 1$).

b) Wenn $G = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$ und b ein Blatt von G, dann ist $G - b := G[V \setminus \{b\}]$ ein Baum.

Bew:



HA.

Satz 6.10

Für einen Graphen $G=(V,E)$ mit $n=|V|$ und $m=|E|$ sind äquivalent:

a) G ist Baum.

b) G ist zshgd und $m=n-1$.

c) G ist kreisfrei und $m=n-1$.

d) G ist Kanten-maximal kreisfrei
(d.h. kreisfrei und jede weitere Kante würde Kreis erzeugen).

e) G ist Kanten-minimal zshgd.
(d.h. zshgd und das Löschen einer beliebigen Kante würde den Zshg. zerstören.

f) Zwischen je zwei Knoten $x,y \in V$ existiert <u>genau</u> <u>ein</u> x,y-Weg in G.

Bew:

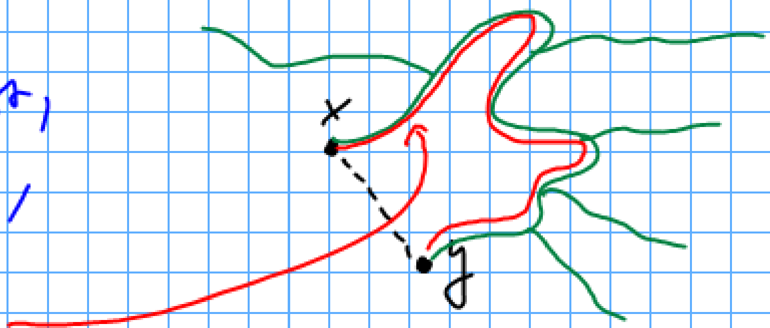
a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a) HA

a) $\Rightarrow$ d): Baum (d.h. kreisfrei + zshgd) $\overset{!}{\Longrightarrow}$ Kanten-maximal kreisfrei.

Kreisfrei ist klar nach Vor.

angenommen, es gäbe $x, y \in V$ mit $\{x,y\} \notin E$, so dass $G' := (V, E \cup \{x,y\})$ immer noch kreisfrei.

Da G Baum ist, ist G zshgd., also ex. in G' ein x,y-Weg



Zusammen mit der Kante $\{x,y\}$ würde dieser Weg aber in G' einen Kreis bilden. $\lightning$.

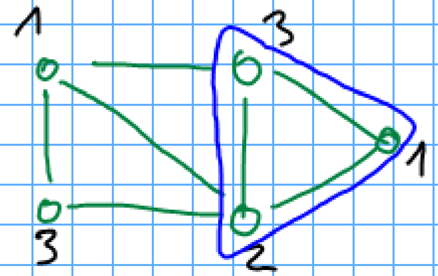
DEF 6.11 Sei $k \in \mathbb{N}$ und $G = (V, E)$ Graph.

Eine k-Färbung von G ist eine Funktion

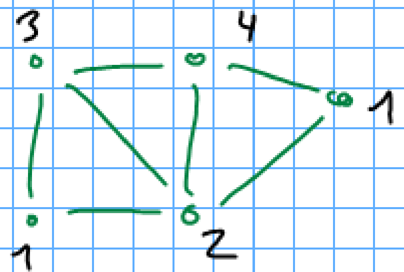
$f : V \longrightarrow [k]$ mit $\forall \{x, y\} \in E : f(x) \neq f(y)$.

chromatische Zahl von G
Färbungszahl von G $:= \chi(G) := \min\{k \in \mathbb{N} : G \text{ hat } k\text{-Färbung}\}$.

Bsp:



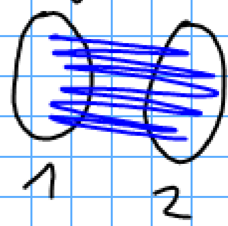
3-Färbung



4-Färbung

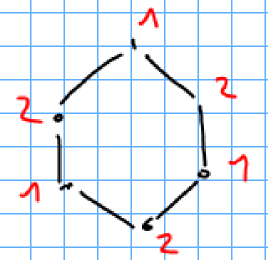
Bem: $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Wenn $\chi(G) \leq 2$, dann heißt G **bipartit**.



Bem 6.12

a) $\chi(C_{2k}) = 2$ $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$



b) $\chi(C_{2k+1}) = 3$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

c) G Baum $\Rightarrow$ $\chi(G) \leq 2$.

Prop 6.13 Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $k := \chi(G)$, $f: V \to [k]$ k-Färbung. Dann:

a) $\forall i \in [k]$: $f^{-1}(i)$ induziert stabile Menge.

b) $|f^{-1}(i)| \leq \alpha(G)$ $\forall i \in [k]$

c) $|V| = \sum_{i=1}^{k} |f^{-1}(i)| \leq k \cdot \alpha(G) \Rightarrow \frac{|V|}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$.

d) $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, denn wenn wir die Knoten in einer beliebigen Reihenfolge abarbeiten und jedem Knoten die niedrigst mögliche Farbe, die bei seinen Nachbarn noch nicht verwendet wurde, dann sind höchstens $\Delta(G)$ Farben verboten, und man kommt mit höchstens $\Delta(G)+1$ Farben aus.

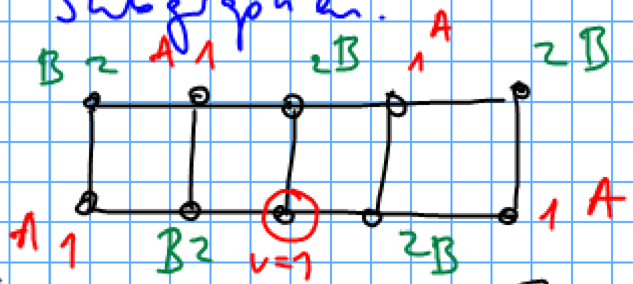
Satz 6.14 Sei $G=(V,E)$ ein Graph. Dann gilt

G bipartit $\iff$ G enthält keinen Kreis ungerader Länge als Subgraphen.

Bew:

($\Rightarrow$) klar

($\Leftarrow$)



OBdA: G sei zshgd. (sonst betrachte Zshg.komp.)

nehme $v \in V$ beliebig.

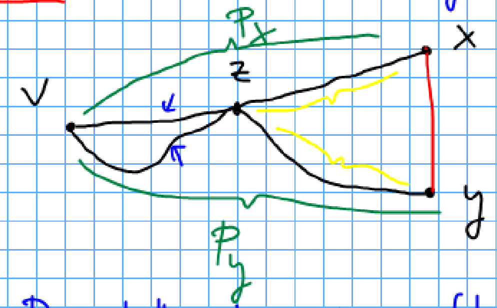
$A := \{ w \in V : \text{ein kürzester } v,w\text{-Weg hat gerade Länge} \}$

$B := \{ w \in V : \text{ungerade Länge} \}$

Klar: $V = A \,\dot\cup\, B$

z.z.: $G[A]$ und $G[B]$ sind stabile Mengen.

Annahme: $\exists$ Kante $\{x,y\}$ mit $x,y \in A$ oder $x,y \in B$.



Sei P_x kürzester v,x-Weg
Sei P_y " v,y-Weg.
$\Rightarrow$ entweder P_x und P_y haben beide gerade Länge ($x,y \in A$) oder beide ungerade Länge ($x,y \in B$).

Sei z der erste gemeinsame Knoten von P_x und P_y (von x bzw. y kommend).

$\Rightarrow$ Wegstück von P_x zwischen z und v hat gleiche Länge wie Wegstück von P_y zwischen z und v.

$\Rightarrow$ Teilstück von P_x zwischen z und x und Teilstück von P_y zwischen z und y haben beide gerade oder beide ungerade Länge.

$\Rightarrow$ Zusammen mit Kante $\{x,y\}$ ergibt sich in beiden Fällen ein ungerader Kreis, ↯.

qed.