7. Exkurs: Diskrete Optimierung

VL 8, 16.12.09

Def 7.1

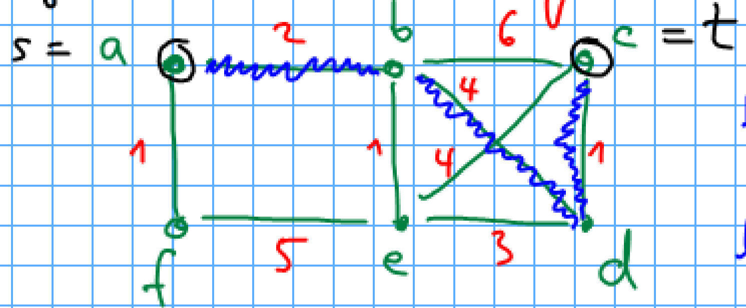
gewichteter Graph: $G = (V, E, \ell)$, wobei (V, E) Graph und $\ell : E \to \mathbb{R}$ („Gewichts"-) Funktion

Wenn $H \subset G$, $H = (W, F)$, dann $\ell(H) := \sum_{e \in F} \ell(e)$

Bsp 7.2 „Kürzester Weg" [shortest path]

gegeben: $G = (V, E, \ell)$, $s, t \in V$.

gesucht: s,t-Weg $H \subset G$, der $\ell(H)$ minimiert.



$H = \left(\{a, b, d, c\}, \{ \{a,b\}, \{b,d\}, \{d,c\} \} \right)$

$\ell(H) = 7$.

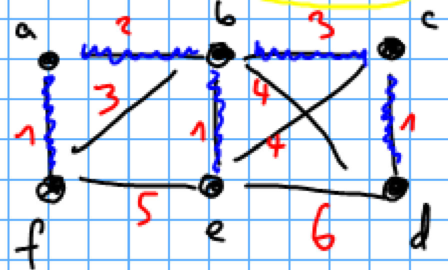
Anwendung: Verkehrsnavigation

Bsp 7.3 „Minimal aufspannender Baum"

[minimal spanning tree]

gegeben: $G = (V, E, \ell)$

gesucht: Baum $H = (V, F) \subset G$, der $\ell(H)$ minimiert.



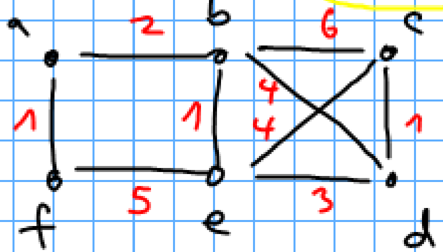
$\ell(H) = 8$

Anwendung: Computer-Netzwerk.

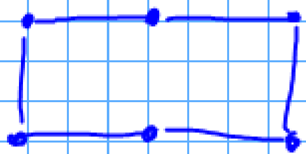
Bsp 7.4 „Kürzeste Rundreise" [Traveling Salesman Problem]

gegeben: $G = (V, E, \ell)$

gesucht: Kreis $H = (V, F) \subset G$, der $\ell(H)$ minimiert.

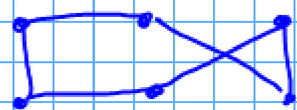


H_1



$\ell(H_1) = 18$

H_2



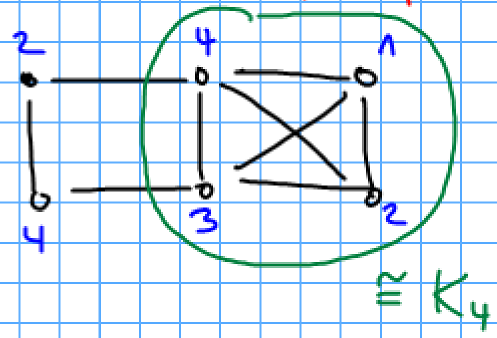
$\ell(H_2) = 17$

Anwendung: Handlungsreisende R.

Bsp 7.5 „Optimale Färbung" [Colouring problem]

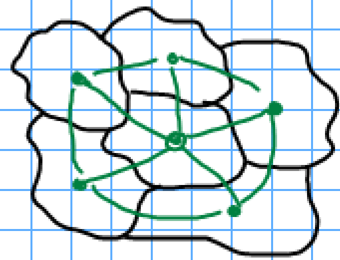
gegeben: $G = (V, E)$

gesucht: k-Färbung von G, die k minimiert.



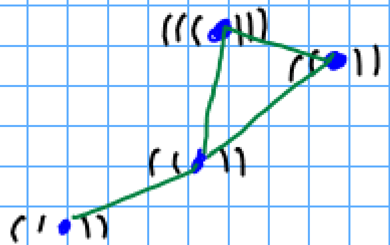
4-Färbung

Anwendung: Landkarten:



Färbe den „Hauptstadtgraphen"!

Frequenz



Farben $\cong$ Frequenzen.

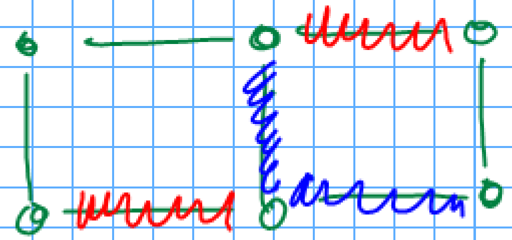
Algorithmische Härtegrad:

7.3 (MST) < 7.2 (sh. paths) < 7.4 (TSP) < 7.5 (COL)

8. Matchings

Def 8.1 $G=(V,E)$ Graph. $M \subseteq E$ Matching, wenn $\forall e \neq e' \in M: e \cap e' = \emptyset$. $v \in V$ heißt von M überdeckt, wenn $\exists e \in M: v \in e$. Wenn $\{x,y\} \in M$, dann heißt x Matchingpartner von y (oder umgekehrt).

Bsp:

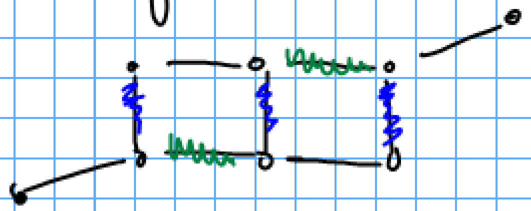


Matching

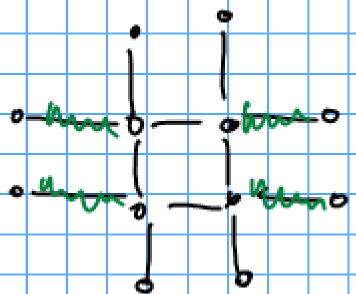
Kein Matching.

- M heißt maximales Matching, wenn $\forall e \in E \setminus M$: $M \cup \{e\}$ ist kein Matching.
- M heißt größtes Matching, wenn $\forall$ Matchings M' von G: $|M'| \le \underline{|M|}$.
  Anzahl Kanten.
- M heißt perfektes Matching, wenn $\forall v \in V$: v ist von M überdeckt.
- Matchingzahl $\nu(G) := \max\{k : G$ hat ein Matching mit k Kanten$\}$.

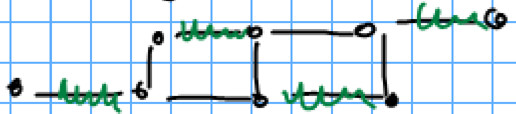
Bsp:



maximales Matching, nicht größtes (wg ⦚ ⦚ ⦚).

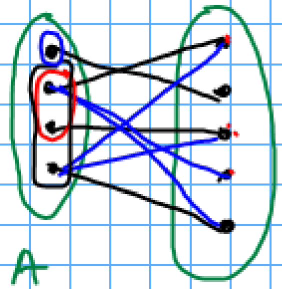


größtes Matching, nicht perfekt.



perfekten Matching.

Bsp:



Satz 8.2

$G = (A \dot\cup B, E)$ sei bipartiter Graph.

Dann:

G hat ein Matching M, das alle Knoten in A überdeckt $\Longleftrightarrow$ $\forall S \subset A: \ |S| \leq |N(S)|$ (*)

$N(S) = \bigcup_{x \in S} N(x)$

Bew:

„$\Rightarrow$": M so wie hier gegeben. Sei S beliebig.

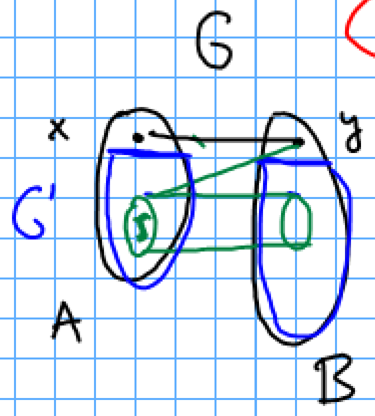
$T :=$ Matchingpartner von Knoten in S.

$\Rightarrow T \subset N(S)$, und $|S| = |T| \Rightarrow |S| \leq |N(S)|$.

„$\Leftarrow$": Induktion über $|A|$. $|A| = 0$ ✓ $|A| = 1$ ✓

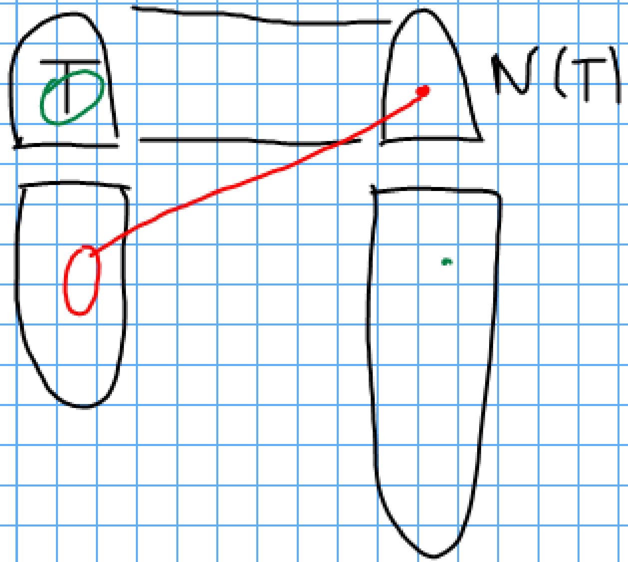
Fall a) $\forall T$ mit $\emptyset \neq T \subset A$ und $|T| < |A|$ gilt:

$$|T| + 1 \leq |N(T)| \qquad (**)$$

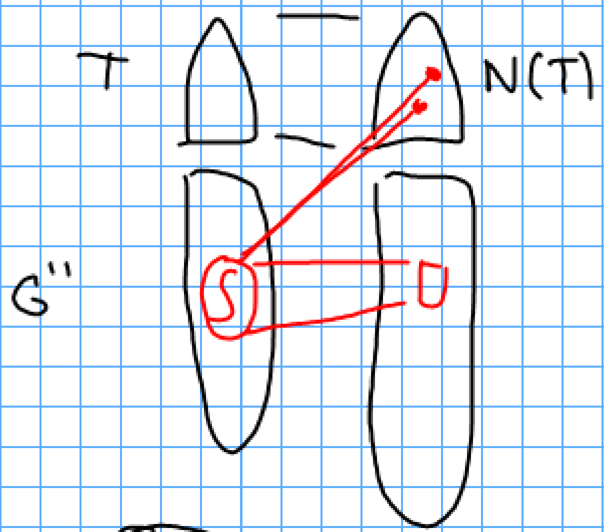


- Wähle bel. Kante $\{x,y\} \in E$ mit $x \in A$ und $y \in B$.
- Betrachte $G' := G[(A \setminus \{x\}) \,\dot\cup\, (B \setminus \{y\})]$.
- Wg $(**)$ erfüllt G' immer noch Bed $(*)$, also ex. nach Ind. ein Matching M', das $A \setminus \{x\}$ überdeckt.
- Zusammen mit der Kante $\{x,y\}$ überdeckt also das Matching $M := M' \cup \{x,y\}$ in G alle Knoten in A.

Fall b) $\exists\, T$ mit $\emptyset \neq T \subset A$, $|T| < |A|$ und $|T| = |N(T)|$



- $G' := G[T \,\dot\cup\, N(T)]$ erfüllt $\circledast$, denn jede „Widerspruchsmenge" wäre auch vorher in G eine gewesen.
- Wg $|T| < |A|$ ex. nach Induktion Matching M' in G', das alle Knoten in T überdeckt.



$G'' := G[(A \setminus T) \,\dot\cup\, (B \setminus N(T))]$

Beh: G'' erfüllt $(*)$

Widerspruchsannahme:
$\exists\, S \subset A \setminus T$ mit $|S| > |N_{G''}(S)|$

Dann wäre

$$|S \cup T| = |S| + |T| > |N_{G''}(S)| + |N_G(T)|$$
$$= |N_G(S \cup T)|, \quad \text{↯ zu } (*) \text{ für } G.$$

Also ex. wg. $|A \setminus T| < |A|$ nach Ind. ein Matching M'' in G'', das alle Knoten in $A \setminus T$ überdeckt.

$\Rightarrow$ $M := M' \cup M''$ überdeckt ~~alle~~ in G alle Knoten in A.