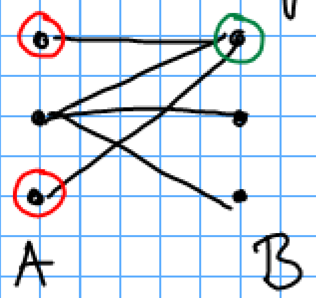
VL 9, 22.12.09

Wdh: $G=(V,E)$ Graph

M Matching $\Leftrightarrow$ $\forall e \neq e' \in M: e \cap e' = \emptyset$



(Hall, 1935)

Satz 8.2 $G=(A \dot\cup B, E)$ bip. Graph

G hat Matching, das alle Knoten in A überdeckt $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \forall S \subset A: \\ |S| \leq |N(S)| \end{array}\right]$ (*)

„Hall-Bedingung"

Folgerung 8.3 $G=(A \dot\cup B, E)$ bip. Graph.

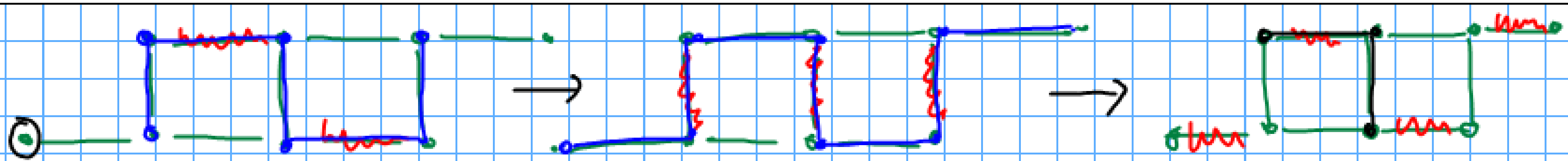
G hat perf. Matching $\Leftrightarrow$ $|A| = |B|$ und (*)

Bew: „$\Rightarrow$": $|A|=|B|$ klar, denn jeder Knoten in A besitzt genau einen Matchingpartner in B.

perf. Matching überdeckt insbes. alle Kn. in A $\overset{8.2}{\Longrightarrow}$ (*).

„$\Leftarrow$": Wg 8.2 impliziert (*), dass ein Matching ex., das alle Knoten in A überdeckt, genauso viele werden dann in B überdeckt. Wg $|A| = |B|$ sind das dann alle in B.

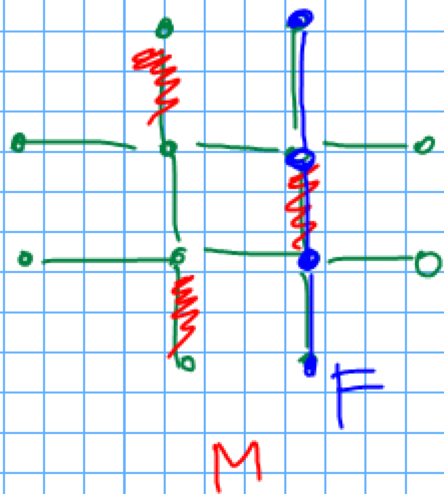
Bsp:

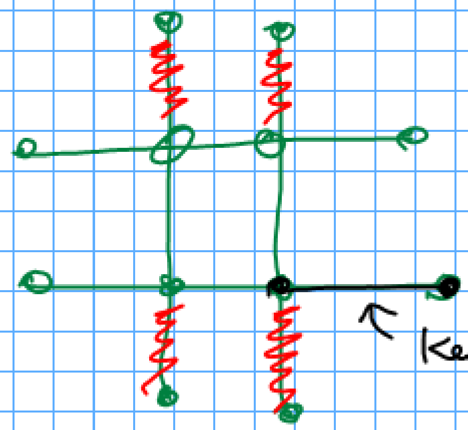


DEF 8.4 $G=(V,E)$ Graph, $M \subset E$ Matching in G.

Ein Weg $P=(W,F) \subset G$ heißt M-alternierend, wenn er abwechselnd Kanten aus M und $E \setminus M$ benutzt.

Wenn außerdem Anfangs- und Endknoten von P beide nicht von M überdeckt sind, und P mindestens eine Kante enthält, dann heißt P M-augmentierend.





kein M-augm. Weg.

$M' = (F \setminus M) \cup (M \setminus F)$

Satz 8.5 $G = (V,E)$ Graph, $M \subset E$ Matching in G.

a) Wenn $P = (W,F)$ M-augmentierender Weg in G, dann ist $M' := F \Delta M := (F \setminus M) \cup (M \setminus F)$ Matching in G und $|M'| = |M| + 1$.

b) $\exists$ Matching M^* in G mit $|M^*| > |M|$
$\Leftrightarrow$ $\exists$ M-augmentierenden Weg in G.

Bew: $M = M \setminus F \mathbin{\dot\cup} (M \cap F)$

a) $M' = (F \setminus M) \cup M \setminus F$

$F \setminus M$: bildet ein Teilmatching mit einer Kante mehr als in $M \cap F$.

$M \setminus F$: Kanten in M, die knotendisjunkt zu W sind

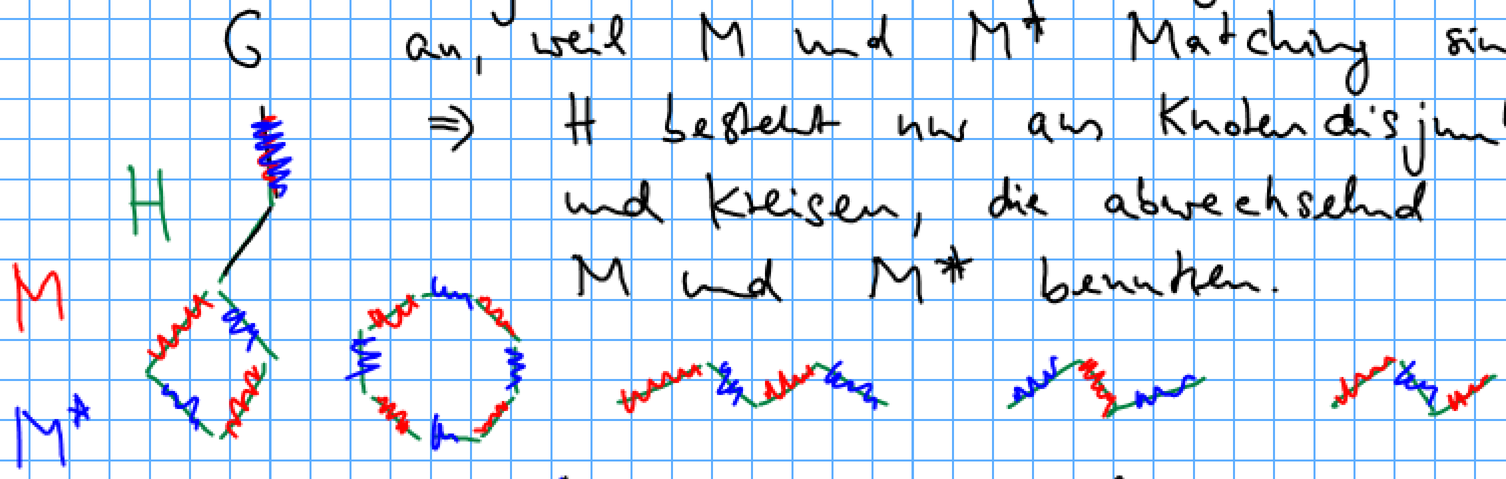
$\Rightarrow$ insgesamt neues Matching mit $|M \setminus F| + |M \cap F| + 1$
$= |M| + 1$ Kanten.

b) „$\Leftarrow$" Klar nach a)

„$\Rightarrow$" Betrachte $H = (V, M \Delta M^*)$.

In jedem Knoten von H liegen höchstens zwei Kanten an, weil M und M^* Matching sind.

$\Rightarrow$ H besteht nur aus Knoten disjunkten Wegen und Kreisen, die abwechselnd Kanten aus M und M^* benutzen.

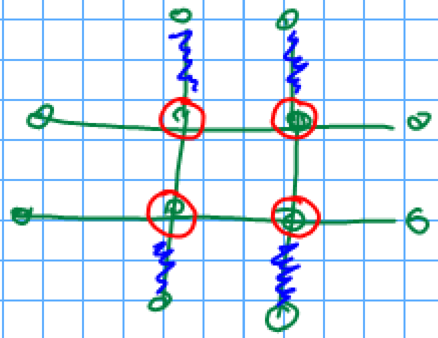


$\Rightarrow$ Kreise sind gerade

Wg $|M^*| > |M|$ muss es mindestens einen Weg geben, der mehr Kanten aus M^* als aus M enthält $\Rightarrow$ M-augmentierender Weg.

qed.

Def 8.6 $G=(V,E)$ Graph.

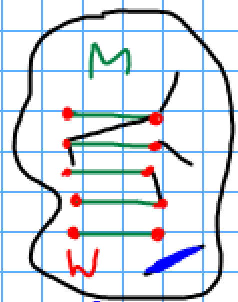


Eine Knotenüberdeckung in G ist eine Menge $W \subset V$, so dass
$\forall e \in E: \; e \cap W \neq \emptyset$.

$\tau(G) := \min\{\ell \in \mathbb{N} : \exists$ Knotenüberdeckung der Größe ℓ in $G\}$

Prop 8.7 $\forall$ Graph G: $\underset{\max}{\nu(G)} \overset{a)}{\leq} \underset{\min}{\tau(G)} \overset{b)}{\leq} 2\nu(G)$.

Bew:



Sei M ein Matching in G mit $|M| = \nu(G)$.

a) Dann muss jede KÜ von G mindestens $|M|$ viele Knoten enthalten, denn jede Kante in M muss überdeckt werden, und jeder Knoten überdeckt höchstens. $\Rightarrow |M| \leq \tau(G)$.

b) Sei W die Menge der von M überdeckten Knoten, d.h. $|W| = 2|M| = 2\nu(G)$. W ist KÜ, denn gäbe es ein $e \in E$ mit $e \cap W = \emptyset$, dann könnte e zu M hinzugefügt werden und ein größeres Matching erzeugen; ↯, denn M ist größtes Matching.

qed

Satz 8.8 Sei $G = (A \cup B, E)$ bip. Graph. Dann $\nu(G) = \tau(G)$.

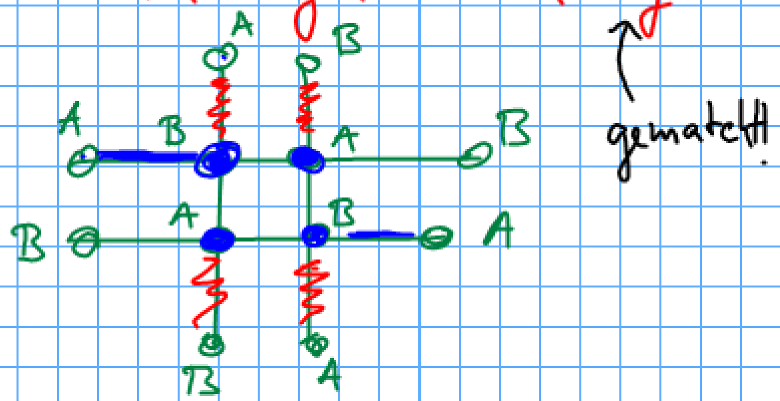
Bew: zeigt z.z.: $\nu(G) \geq \tau(G)$. (8.7: $\nu(G) \leq \tau(G)$.)

Sei M Matching in G mit $|M| = \nu(G)$.

Konstruiere Knotenüberdeckung $U \subset A \cup B$ wie folgt:

Betrachte von M überdeckten Knoten in G und füge für jede Matching-Kante $\{x, y\} \in M$ mit $x \in A$ und $y \in B$:

- y zu U, wenn es einen M-alternierenden Weg gibt, der in einem ungematchten Knoten aus A beginnt, und mit einer Nicht-Matching-Kante in y endet.
- x zu U, andernfalls.



Klar: $|U| = |M| = \nu(G)$.

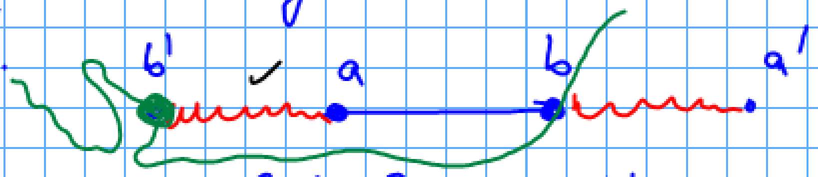
?

z.z.: U ist Kü. Sei $\{a,b\} \in E$, $a \in A$, $b \in B$.

d.h. z.z.: $a \in U$ oder $b \in U$.

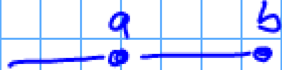
Wenn $\{a,b\} \in M$, dann $a \in U$ oder $b \in U$ nach Konstr. von U.

Sei $\{a,b\} \notin M$. Da M größtes Matching ist, ex. Kante $\{b',a\} \in M$ oder $\{b,a'\} \in M$.



Wenn a ungematcht, dann ist $b \in U$ nach Konstruktion. Sei also $\{b',a\} \in M$. Wenn $a \in U$ fertig. Wenn $a \notin U$, dann muss $b' \in U$, also ex. alternierender Weg P, der in b' endet. Aber dann ex. auch alternierender Weg P', der in b endet:

falls $b \in P$: P' = Anfangsstück von P bis b.

falls $b \notin P$: $P' = P$ plus 
.

Also $b \in U$.