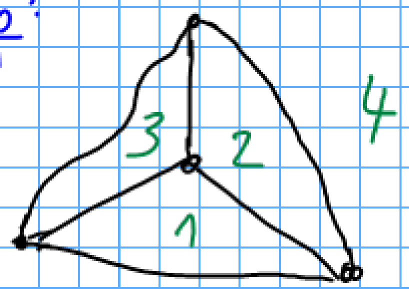
9. Färbungen von planaren Graphen

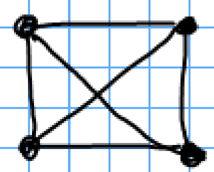
VL 10, 13.1.10

Def 9.1 Graph $G=(V,E)$ heißt **planar**, wenn man Knoten und Kanten „so in die Ebene zeichnen kann", dass sich Kanten nicht „kreuzen".
Eine solche Zeichnung von G heißt **Einbettung** von G.
Die durch sie entstehenden „Zusammenhangskomponenten der Ebene" bilden die Menge der **Gebiete** R, nenne $G=(V,E,R)$ einen **ebenen** Graphen.

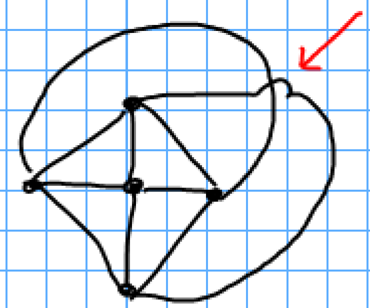
Bsp:



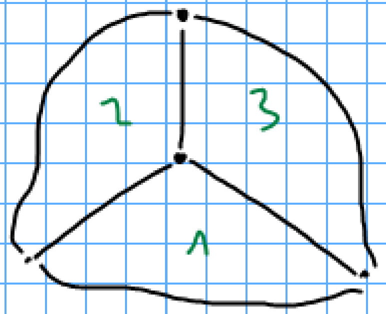
ebene Graph mit 4 Gebiete



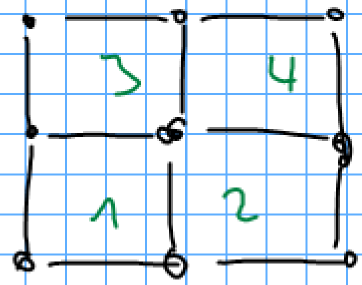
planarer Graph



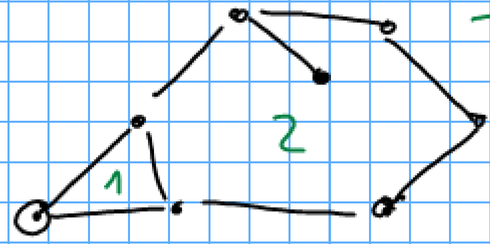
nicht planarer Graph.



$|V| = 4$
$|E| = 6$
$|R| = 4$

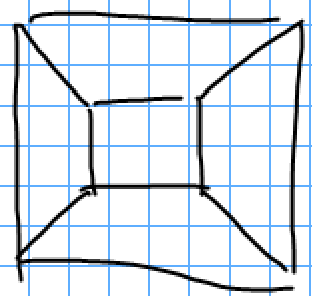


$|V| = 9$
$|E| = 12$
$|R| = 5$



$|V| = 8$
$|E| = 9$
$|R| = 3$

Eulersche Polyeder Formel : $|V| - |E| + |R| = 2$



$|V| = 8$
$|E| = 12$
$|R| = 6$

Satz 9.2 (Euler, 1750)

$G = (V, E, R)$, eben, zshgd $\Rightarrow |V| - |E| + |R| = 2$.

Bew: Induktion über $|E|$.

$|E| = 0 \Rightarrow |V| = 1, |R| = 1$ $\quad 1 - 0 + 1 = 2$

$|E| \geq 1$

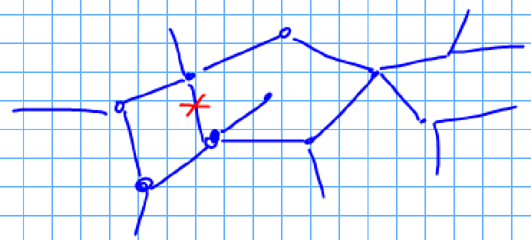
1. Fall: $G = (V, E, R)$ hat kein Kreis.

$\Rightarrow G$ ist Baum. $\Rightarrow |R| = 1$

$|E| = |V| - 1$

$\Rightarrow |V| - (|V| - 1) + 1 = 2$.

2. Fall: $G = (V, E, R)$ hat Kreis. Lösche Kante e aus Kreis, (Endknoten von e bleiben).



$\rightarrow$ Graph $G^- = (V^-, E^-, R^-)$.

$|V^-| = |V|$, $|E^-| = |E| - 1$, $|R^-| = |R| - 1$

G^- ist eben, zshgd

Ind $\Rightarrow |V^-| - |E^-| + |R^-| = 2$

$\Rightarrow |V| - (|E| - 1) + (|R| - 1) = 2$

$\Rightarrow |V| - |E| + |R| = 2$. $\quad$ qed.

Korollar 9.3 Sei $G=(V,E)$ planar, zshgd, $|V| \geq 4$.

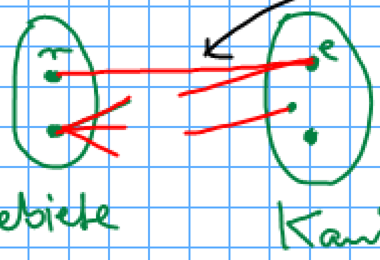
a) $|E| \leq 3\cdot|V| - 6$

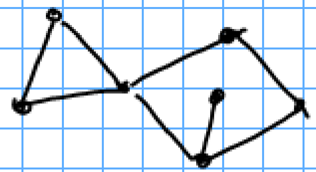
b) G hat mind. einen Knoten vom Grad ≤ 5.

Bew: $3\cdot|R| \leq 2\cdot|E|$

Sei $G=(V,E,R)$ Einbettung von G.

e berandet r





$\Rightarrow$ $3\cdot|R| \leq$ #Kanten in Hilfsgraph $\leq 2|E|$

$\Rightarrow |R| \leq \frac{2}{3}|E|$

$\Rightarrow \frac{2}{3}|E| \geq |R| \underset{9.2}{=} 2 - |V| + |E| \Rightarrow |V| - 2 \geq \frac{1}{3}|E|$

$\Rightarrow 3|V| - 6 \geq |E|$.

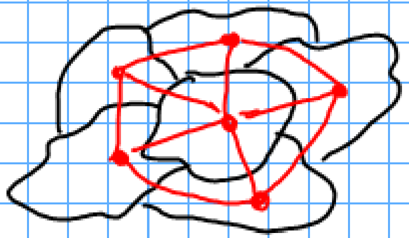
b) $\lightning$-Annahme: alle Knoten haben Grad ≥ 6.

$\Rightarrow 2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) \geq 6\cdot|V|$

$\Rightarrow |E| \geq 3\cdot|V|$ $\lightning$. qed

Bem: K_5 nicht planar, weil $|V|=5$, $|E|=10$, $3\cdot 5 - 6 \not\geq 10$

Satz 9.4 Jeder planare Graph $G = (V, E)$ ist $\cancel{4}$ 5-färbbar.



Bew: OBdA G zshgd.

Induktion über $|V|$.

$|V| \leq 5 \Rightarrow G$ 5-färbbar.

$|V| \geq 6$. Nach Kor. 9.3 ex. Knoten v mit $\deg(v) \leq 5$.

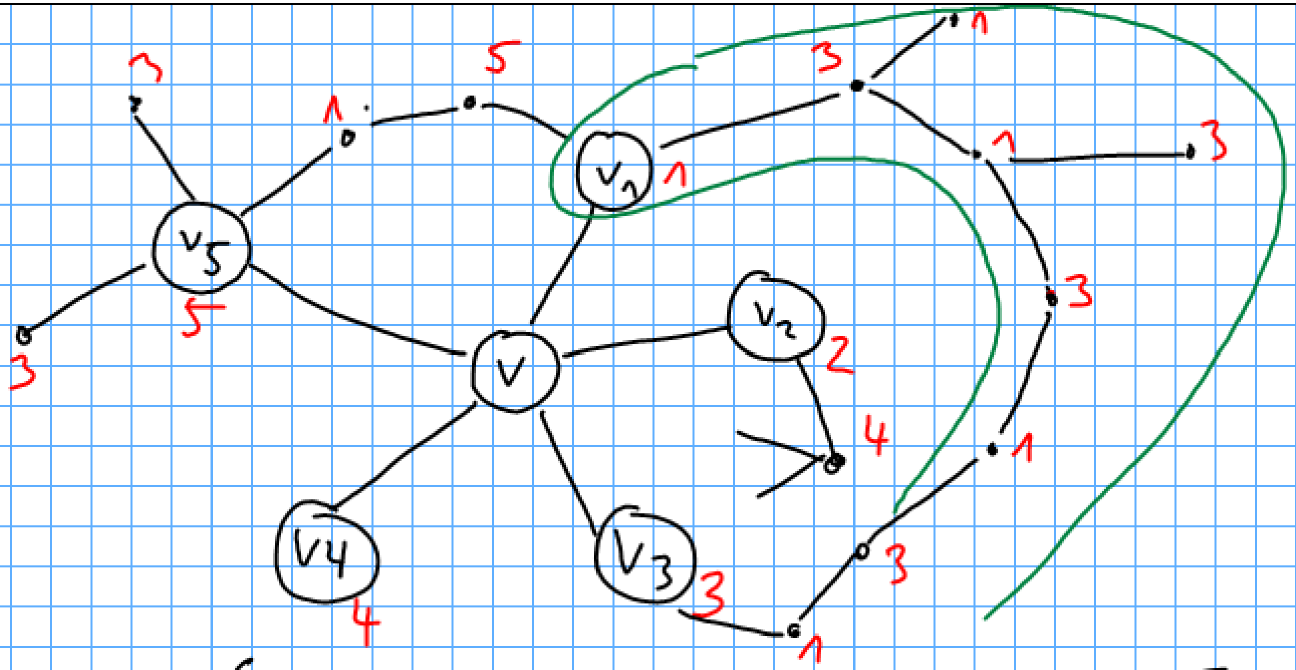
Betrachte $G' := G - \{v\}$.

G' planar $\overset{\text{Ind}}{\Longrightarrow}$ G' hat 5-Färbung f.

1. Fall: $\deg(v) = 5$ und f färbt alle Nachbarn $v_1, \dots, v_5$ mit 5 unterschiedlichen Farben.

2. Fall: sonst — fertig: färbe v mit einer freien Farbe.

bleibt 1. Fall.



$G_{1,3} :=$ { Knoten aus G, die von f Farbe 1 oder 3 haben und durch einen Weg mit v_1 verbunden sind, der nur Knoten mit Farbe 1 oder 3 hat }

Wenn $v_3 \notin G_{1,3}$, dann vertausche Farben 1 und 3 in $G_{1,3}$, v_1 hat jetzt Farbe 3, $v_2, \dots, v_5$ wie bisher, färbe v mit Farbe 1, fertig.

Wenn $v_3 \in G_{1,3}$, dann gibt es „1,3"-Weg von v_1 nach v_3.

Betrachte jetzt $G_{2,4} := \{$Knoten aus G, die von f Farbe 2 oder 4 haben und durch einen Weg mit v_2 verbunden sind, der nur Knoten von Farbe 2 oder 4 hat$\}$.

$\Rightarrow v_4 \notin G_{2,4}$.

Tausche Farben 2 und 4 in $G_{2,4}$.

$\Rightarrow v_2$ hat jetzt Farbe 4, v_1, v_3, v_4, v_5 wie vorher

$\Rightarrow$ färbe v mit Farbe 2, fertig.

qed.

Aufgabe 5.5 Es sei G ... zshgd.