# 10. Partielle Ordnungen

VL 11, 20. 1. 10

$M$ Menge

$R \subset M \times M$ Relation, irreflexiv, symmetrisch $\Rightarrow R$ Graph

Relation, refl., sym., transitiv $\Rightarrow R$ Äquiv.rel.

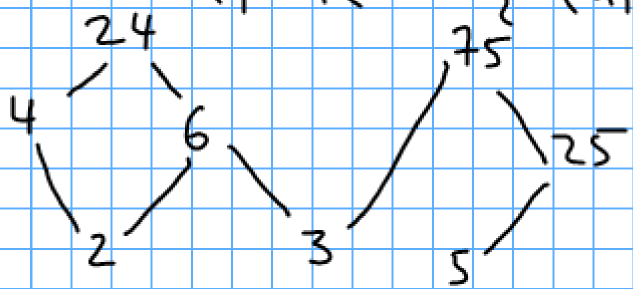
**Def 10.1**

Eine Relation $R \subset M \times M$, die reflexiv, antisymmetrisch, transitiv ist, heißt partielle Ordnung (engl.: partially ordered set, poset) auf $M$.

$(x,y) \in R$, $(y,x) \in R \Rightarrow x = y$

**Bsp 10.2**

a) $R := \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a$ ist Teiler von $b \}$ ist poset




b) $X$ sei beliebige Menge und $R := \{ (A,B) : A \subset X, B \subset X, A \subset B \} \subset \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$

übliche Schreibweise für posets:
statt $(a,b) \in R$ schreibe $a \leq b$.
und schreibt auch $(M, \leq)$ für allgemeines poset.
z.B. 10.2 b) : $(\mathcal{P}(X), \subset)$.
Teilmenge

Def 10.3 Sei $R = (M, \leq)$ ein poset.

a) $a, b \in M$ heißen vergleichbar, wenn $a \leq b$ oder $b \leq a$.

b) sonst: unvergleichbar

c) $R$ heißt vollständig oder linear, wenn alle $a, b \in M$ vergleichbar sind.

d) $R' = (M, \leq')$ heißt lineare Erweiterung von $R$, wenn $R \subset R'$ und $R'$ linear ist.

e) $a \in M$ wird von $b \in M$ überdeckt, wenn $a \leq b$ und $\nexists c \in M_{\setminus\{a,b\}}$ mit $a \leq c$ und $c \leq b$, und $a \neq b$.

f) Das Hasse-Digramm von $R$ ist ein Diagramm des Graphen $(M, \{\{a,b\} : a \text{ wird von } b \text{ überdeckt}\})$, bei dem für jedes Paar $a \leq b$ der Knoten $a$ unterhalb von $b$ gezeichnet wird.

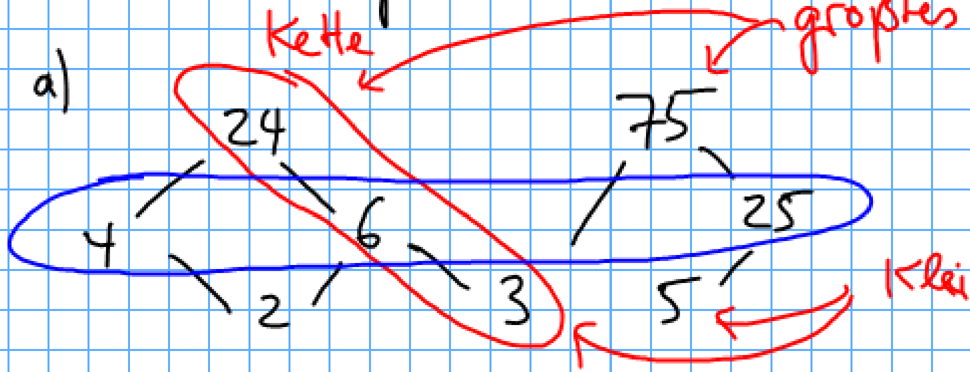
g) Eine Kette in $R$ ist eine Menge $K \subset M$, mit
$\forall a \neq b \in K$: $a$ und $b$ sind vergleichbar.
Eine Antikette in $R$ ist eine Menge $L \subset M$ mit
$\forall a \neq b \in L$: $a$ und $b$ sind unvergleichbar.

h) $a \in M$ heißt größtes Element, wenn es kein $b \in M \setminus \{a\}$ mit $a \leq b$ gibt,
$a \in M$ heißt kleinstes Element, wenn es kein $b \in M \setminus \{a\}$ mit $b \leq a$ gibt.

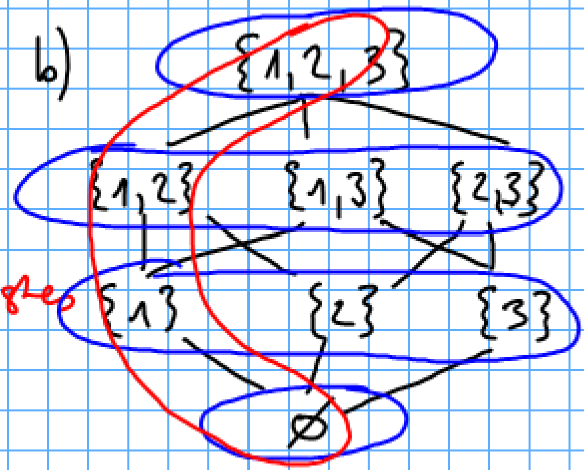
Bsp 10.2

Antikette

a)




b)



**Satz 10.4** Sei $R = (M, \preceq)$ poset. Dann

$$\ell := \begin{array}{l}\text{minimale Anzahl} \\ \text{von Antiketten in} \\ \text{einer Partition von } M\end{array} \overset{!}{=} \begin{array}{l}\text{maximalen Anzahl} \\ \text{von Elementen} \\ \text{in einer Kette}\end{array} =: k$$

**Bew:** Sei $K$ Kette in $R$ mit $|K| = k$.

Klar: $\ell \geq k$, denn jede Antikette kann maximal ein Element aus $K$ enthalten.

z.z: $\ell \leq k$.

z.z: Konstruiere Partition von $M$ in $\leq k$ Antiketten

$A_i := \{ x \in M :$ längste Kette mit $x$ als größtem Element hat genau $i$ Elemente $\}$

längste Kette in $R$ hat $k$ Elemente $\Rightarrow A_i = \emptyset$ für $i > k$.

$\Rightarrow M = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup A_3 \dots \dot\cup A_k$.

noch z.z: $A_i$ ist Antikette für $i \in [k]$

↯-Annahme $\exists i \in [k] : \exists x \neq y \in A_i$ mit $x \precneqq y$.

$$\Rightarrow \exists \underbrace{x_1 \precneqq x_2 \precneqq \dots \precneqq x_{i-1} \precneqq x}_{x \in A_i} \precneqq y$$

$\Rightarrow y \in A_j$ mit $j \geq i+1$, ↯.

qed.

## Satz 10.5

Sei $R = (M, \leq)$ poset. Dann:

$k :=$ minimale Anzahl von Ketten in einer Partition von $M$ $\overset{!}{=}$ maximale Anzahl von Elementen in eine Antikette $=: \ell$

Bew: Sei $L$ Antikette mit $|L| = \ell$.

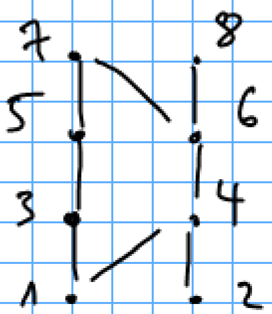
Klar: $k \geq \ell$, denn jede Kette kann maximal ein Element aus $L$ enthalten.

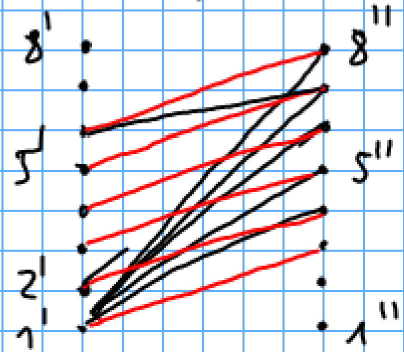
z.z: $\ell \geq k$

Kopien von $M$

Konstruiere bip. Graph $G := (M' \cup M'', E)$

$$E := \{ \{x', y''\} : \underset{x \neq y}{x, y} \in M,\ x \leq y \}$$

$R =$ 


$G =$ 


(nicht alle Kanten eingez.)

Sei $F \subset E$ größtes Matching in $G$

$C = M' \cup M''$ kleinste Knotenüberdeckung in $G$

Satz 9.8 $\Rightarrow |F| = |C|$.

Konstruiere jetzt Ketten-Partition:

a) Wähle beliebiges kleinstes Element $x_1$ und verfolge Folge

$\underbrace{x_1' \; x_2''}_{\in F} \; \underbrace{x_2' \; x_3''}_{\in F} \ldots, \underbrace{\; x_t''}_{\in F} \; x_t'$, bis $x_t'$ nicht mehr vom Matching $F$ überdeckt.

$\Rightarrow x_1 \preceq x_2 \preceq \ldots \preceq x_t$

b) lösche Kopien von $x_i$ in $G$

Wiederhole Prozedur, bis $|M'| - |F| = |M| - |C|$ Ketten gefunden sind.

Noch zu finden: Antikette mit $|M| - |C|$ Elementen.

$A := \{ x \in M : x' \notin C \text{ und } x'' \notin C \}$.

$\Rightarrow |A| \geq |M| - |C|$

A ist Antikette, denn wäre $x, y \in A$ (also $x', x'' \notin C$, $y', y'' \notin C$) mit $x \preceq y$, (also $\{x', y''\} \in E$), dann würde $C$ die Kante $\{x', y''\}$ nicht überdecken, $\lightning$ zu $C$ Knotenüberdeckung.